كارلتون تاور دبي

The Carlton Tower Dubai

TEL: 227111 - تلفون ٢٢٧١١١

ஆரம்ப தூய கணிதம்

நூலாக்கம் :

சி. நடராசர், M.A., B.Sc.

(முன்னைநாட் கணித உபபோசிரியர், இலங்கைப் பல்கலைக்கழகம்)

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்துக்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது.

முதற் பதிப்பு : 1959.

இரண்டாம் பதிப்பு : 1968.

ELEMENTS OF PURE MATHEMATICS

by

S. NADARASAR, M.A., B.Sc.

TRANSLATED AND PUBLISHED IN CEYLON

by

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT

உரிமைகள் அரசினர்க்கே

நூன்முகம்

"Elements of Pure Mathematics" என்னும் இந்நூலின் கையெழுத்துப் பிரதி ஆங்கிலத்தில், இலங்கைப் பல்கலைக்கழக முன்னைநாள் உப பேராசிரியர் சி. நடராசர் அவர்களால் எழுதப்பட்டுப் பின்பு தமிழில் மொழி பெயர்க்கப்பட்டது.

இந்நூல், முக்கியமாகச் சாதாரண நிலை, உயர் நிலைக் கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திரப் பரீட்சைகளுக்கும் இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத் தொடக்கப் பரீட்சைக்கும் பயிலும் மாணவர்களுக்குப் பயன்படுமாறு எழுதப்பட்டது. கணித அடிப்படைகளைக் கசடற நன்கு மாணவர் புரிந்து கொள்ளுமாறு உதவ, எண்கொண்ட கணக்களுக்குத் தீர்வுகள் தரப்பட்டுள.

இந்நூலின் தமிழ் மொழிபெயர்ப்பின் முதலாம் பதிப்பு 1959 இற் பிரசுரிக்கப்பட்டது. இவ்விரண்டாம் பதிப்பு புதுக்கிய கணிதக் கலைச் சொற்களைப் புகுத்தி, முற்றாகத் திருத்திப் பதிப்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

எம். ஏ. பெரேரா,
ஆணையாளர்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
"சிறீமதிபாயா"
58, சேர் ஏணெஸ்ற் டி சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு 3.

සංඥාපනය

මේ පොත එස්. නඩරාසර් විසින් රචිත Elements of Pure Mathematics ග්‍රන්ථයේ ඉංග්‍රීසි මුල් අත් පිටපතේ දෙමළ පරිවර්තනය යි.

මෙය අ. පො. ස. (සාමාන්‍ය), අ. පො. ස. (උසස්) පෙළත් විශ්ව විද්‍යාලය ප්‍රවේශ පන්තිවලත් ඉගෙනීම ලබන සිසුන් ගේ අවශ්‍යතාව සපුරා-ලන පරිදි ලියා ඇත. යෙදී ඇති මූලධර්ම පිළිබඳ සම්පූර්ණ අවබෝධයක් සිසුනට ලබා-ගැනීමට උපකාරයක් වශයෙන් සංඛ්‍යාත්මක නිදසුන්වල විසඳුම් ද සපයා ඇත.

දෙමළ අනුවාදයේ පළමු වැනි මුද්‍රණය පළ කෙරුණේ 1959 දී ය. ඉන් ඉක්බිති පිළියෙළ කරනු ලැබූ ඇතැම් ගණිතමය පද ඇතුළු කර මේ මුද්‍රණය සම්පූර්ණයෙන් ම සංශෝධනය කරන ලදී.

ඇම්. ඒ. පෙරේරා,
කොමසාරිස්.

කොළඹ 3,
ශ්‍රීමත් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවතේ, 58හි
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ දී ය.

தோற்றுவாய்

1. இந்நூல், முக்கியமாகச் சாதாரண நிலை, உயர்நிலைக் கல்விப்பொதுத் தராதரப்பத்திர பரீட்சைகளுக்கும் இலங்கைப் பல்கலைக் கழகத் தொடக்கப் பரீட்சைக்கும் பயிலும் மாணவர்களுக்குப் பயன்படுமாறு எழுதப்பட்டுள்ளது. இம்மாணவருக்கெனத் தூய கணிதத்தில் வேறான நூலொன்று இருக்க வேண்டுமென்பது நெடுங்காலமாக உணரப்பட்டுள்ளது. இந்நூலானது அத்தேவையைத் தீர்க்குமென எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

2. இதனைப் படிப்பவருக்குத் தொடக்கத் தூய கணிதத்தில், பொதுத் தராதரப் பரீட்சையின் சாதாரண நிலையளவிற்கு அறிவு இருக்குமென எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. அவர், திரிகோண கணிதம், பகுப்புக் கேத்திர கணிதம், நுண்கணிதம், அல்லது திண்மக் கேத்திரகணிதம் ஆகியவற்றை அறிந்திருக்க வேண்டுமென எதிர்பார்க்கப்படவில்லை. இப்பாடங்கள் முதற் றத்துவங்களிலிருந்தே விரித்தெழுதப்பட்டனவாதலின், கற்கத் தொடங்கு பவருக்கு இம்முறையை விளங்குவதில் கடினம் யாதுமிராது.

3. தூய கணிதத்தின் சாரம் தருக்கமுறைப் பகுத்தறிவாராய்ச்சியாகும். அடிப்படையான எடுகோள்கள் தெளிவாகக் கூறப்படல் வேண்டும். இவ் வெடுகோள்களையும் தருக்கவியலின் சாதாரண விதிகளையும் பயன்படுத்தி உள்ளுணர்வைச் சிறிதுங் கோராது இக்கொள்கையானது விருத்தியாக்கப் படல் வேண்டும். இந்தப் பாடத்தைத் தொடங்குபவர்களுக்குப் புதிதாக அறிவைப் புகுத்துதலில் முற்றிலும் சித்திபெறுவது கடினமாயிருப்பினும் அந்த எண்ணத்தைக் கடைப்பிடிப்பதற்குத் தீவிரமான முயற்சி எடுக்கப் பட்டுள்ளது.

4. நுண்கணிதத்திலுள்ள அனேகமான மூலாதார நூல்கள் இப்பாடத் தைக் கேத்திர கணிதமுறையில் புகுத்துகின்றன. வகையீட்டுக் குணகத்தின் வரைவிலக்கணம் ஒரு வளையியது தொடலியினால் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. உயர் விழிவுக் கொள்கையும் கேத்திர கணிதக் கருத்துக்களி லிருந்து தோன்றிற்று. இது போதியவளவு திருப்திகரமானதல்ல. இது ஒரு வரைவிலக்கணம், அல்லது விளக்கம் தெரிந்த கருத்து என்பனவற்றி லிருந்து கொடுக்கப்படல் வேண்டும். நுண்கணிதத்தைப் படிக்கத் தொடங் கும் ஒருவருக்கு வட்டமொன்றிற்குரிய தொடலியைப் பற்றிச் சிறிதளவு தெரிந்திருந்த போதிலும் வளையியொன்றின் தொடலியைப் பற்றி ஒன்றும் தெரியாது. மேலும், நுண்கணிதத்தின் அத்திவாரம் முற்றிலும் எண்கணிதத்திற்குரியவைகளாகும். நுண்கணிதத்தின் அமைப்பு முற் றிலும் எண்களினது தொடக்கப் பண்புகளையே அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது எல்லா விஞ்ஞானக் கிளைகளிலும் எடுத்தாளப்படுகின்றது போல

கேத்திரகணிதத்திற் பிரயோகிக்கப்பட்ட போதிலும் இக்கொள்கை கேத்திர கணிதத்தின் எக்கருத்திலும் தங்கியிருக்கவில்லை. நுண்கணிதத் தேற்றங்களை எடுத்துக்காட்டுவதற்கு கேத்திர கணிதக் கருத்துக்களைப் பயன்படுத்தலாம் ; ஆனால் அவற்றை நிறுவுவதற்கு இக்கருத்துக்களைப் பயன்படுத்துவதில்லை.

5. இந்த நூலின் கையெழுத்துப் பிரதி ஆங்கிலத்தில் எழுதப்பட்டுப் பின்பு தமிழில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டது. ஆக்கியோனால், அல்லது மொழி பெயர்ப்பாளனால் விடப்பட்டிருக்கக்கூடிய பிழைகளும் அச்சுப் பிழைகளும் இருக்கக்கூடும். இவ்வாறான பிழைகளிருப்பின் அவற்றை எடுத்துக்காட்டுவோருக்கு நூலாசிரியர் மிகவும் நன்றியுள்ளவராவார்.

சி. நடராசர்.

ஆரம்ப தூய கணிதம்

	பக்கம்
திரிகோணகணிதம்	
அத்தியாயம் 1	17
அத்தியாயம் 2	22
அத்தியாயம் 3	30
அத்தியாயம் 4	50
அத்தியாயம் 5	60
அத்தியாயம் 6	73
ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்	
அத்தியாயம் 1	93
அத்தியாயம் 2	102
அத்தியாயம் 3	113
அத்தியாயம் 4	131
அத்தியாயம் 5	155
அத்தியாயம் 6	163
அத்தியாயம் 7	170
நுண்கணிதம்	
அத்தியாயம் 1	179
அத்தியாயம் 2	199
அத்தியாயம் 3	223
அத்தியாயம் 4	241
அத்தியாயம் 5	257
அட்சரகணிதம்	
அத்தியாயம் 1	275
அத்தியாயம் 2	291
அத்தியாயம் 3	309
அத்தியாயம் 4	315
திண்மக் கேத்திரகணிதம்	
அத்தியாயம் 1	343
விடைகள்	377

தூயகணித மூலகங்கள்

முன்னுரை

கணிதத்தின் அடிப்படையெண்ணக்கரு எண்ணாகும். தொடக்க வெண்கள் வழக்கின் படி தொடர் வரிசையிற் பெயரிடப்பட்டு எழுதப்பட்ட 1,2,3,4,.... என்னும் நேர் முழுவெண்களாகும். அத்தொடரில் 1 அல்லாத யாதேனும் பிறவெண் அதற்கு முன்னதாகவுள்ள எவ்வெண்ணிலும் பெரிதெனப் படும். இவ்வெண்கள் எண்ணுதற்கு வழங்கப்படும். ஒரு குறித்த தொகுதியிலுள்ள பொருள்களை எண்ண விரும்பினால், அப்பொருள்களுக்குந் திருத்தமான வரிசையிலே தேரப்பட்ட நேர் முழு வெண்களைக் குறிக்குங் குறியீடுகளுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று ஒப்பு என்பதை நிலைநிறுத்துகின்றோம். ஒரு பொருளை 1 என்னும் முதலாம் முழுவெண்ணோடும், ஒரு பொருளை 2 என்னும் முழுவெண்ணோடும், ஒரு பொருளை 3 என்னும் முழுவெண்ணோடும் இவ்வாறு எல்லாப் பொருள்களையும் ஒழிக்கும் வரைக்கும் இணைக்கின்றோம். தேரப்பட்ட ஈற்று முழுவெண் அத்தொகுதியிலுள்ள பொருள்களினுடைய தொகையைக் குறிக்கின்றதெனப்படும்.

கூட்டல். இரு முழுவெண்களின் கூட்டலானது அவ்விரு முழுவெண்களைக் குறிக்கின்ற பொருள்களுடைய இரு கூட்டங்கள் பற்றியதென வரைவிலக்கணங் கூறப்படுகின்றது. அவ்விரு கூட்டங்களும் ஒரு தொகுதியாகும்படி சேர்க்கப்படுகின்றன ; அப்புதிய கூட்டத்தாற் குறிக்கப்படும் முழுவெண் வேறுவேறான அவ்விரு தொகுதிகளாற் குறிக்கப்படும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை எனப்படும். m, n என்னும் இரு முழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகை $m+n$ என்பதனாற் குறிக்கப்படும் ; வரைவிலக்கணத்தின்படி $m+n=n+m$ என்பது தெளிவு.

பெருக்கல். பெருக்கல் என்பது தொடர்ந்த கூட்டல் என வரைவிலக்கணங் கூறப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் m என்னும் முழுவெண்ணைக் குறிக்கின்ற n பொருட்கூட்டங்களை ஒரு கூட்டமாகும்படி ஒருங்குவைத்தால், அப்புதிய கூட்டத்தாற் குறிக்கப்படும் முழுவெண் n, m என்பனவற்றின் பெருக்கம் எனப்படும் ; அது $n \times m$ அல்லது mn என எழுதப் படும்.

....
....
....

m பொருள்களுடைய n கூட்டங்கள் n கிடைக் கோடுகளுள் ஒவ்வொன்றின் மீதும் m குத்துகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்க; ஆயின், ஒவ்வொன்றும் n குத்துக்களைக் கொள்ளுகின்ற m நிலைக்குத்

துக்கோடுகளையும் பெறுகின்றோம். எனின், m பொருள்களுடைய n கூட்டங்களானவை n பொருள்களுடைய m கூட்டங்கள் குறிக்கும் முழுவெண்ணையே குறிக்கும்.

ஆகவே, $$m \times n = n \times m$$

m, n, p என்பன நேர் முழுவெண்களாயின், மேற்காணும் மூன்று விதிகளுங் கூட்டல் பெருக்கல்களினுடைய வரைவிலக்கணங்களிலிருந்து நேரே பெறப்படும்.

(1) தொகுப்பு விதி.

$$(m+n)+p = (n+p)+m = (p+m)+n$$

(2) பரம்பல் விதி.

$$m(n+p) = mn+mp$$

(3) மாற்று விதி.

$$m \times (n \times p) = n \times (p \times m) = p \times (m \times n)$$

$p > q$ எனின், $mp > mq$ என்பதும் பெறப்படும்.

வகுத்தல். m, n என்பன நேர் முழுவெண்களாயிருக்க $m = n \times p$ ஆகும்படி p என்னும் வேறொரு முழுவெண் காணப்படின், m ஆனது n ஆல் வகுபடுமென்றும், அவ்வாறு வகுக்க வரும் ஈவு p யாகுமென்றுங் கூறுவோம். m என்பது n இன் முழுவெண் மடங்கு என்றும் n என்பது m இன் காரணிகளுள் ஒன்று அல்லது சினைகளுள் ஒன்று என்றுங் கூறப்படும்.

m ஐ n ஆல் வகுத்தல் m பொருள்களின் ஒரு கூட்டத்தை ஒவ்வொன்றும் n பொருள்கள் கொள்ளும் ஒரு தொகை கூட்டங்களாகப் பிரித்தலாற் குறிக்கப்படக்கூடும்.

பின்னவெண்கள்.

m, n என்பன முழுவெண்களாயிருக்க $m = n \times p$ என்னுந் தொடர்பைத் தீர்க்கத்தக்க p என்னும் முழுவெண் யாதொன்றுங் காணப்படாதாயின் m என்பது n ஆல் வகுபடாதெனக் கூறுகிறோம். செய்முறைப் பிரயோகங்களில் இத்தகைய நிலைமைகளிலும் யாதுமொரு வகுத்தலினத்தைப்பற்றி சிந்திக்க வேண்டும். 9 அப்பிட் பழங்களை 8 பிள்ளைகளுக்குச் சம பங்குகளாகப் பிரித்துக் கொடுக்க விரும்புகின்றோம் எனக் கொள்க. ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் ஒவ்வொரு முழுப்பழத்தைக் கொடுத்துவிட்டு, மீதியாயுள்ள ஒரு பழத்தை 8 சம பங்குகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் ஒரு பங்கைக் கொடுக்கலாம். ஒரு முழுப்பழம்

1 என்னும் எண்ணைக் குறித்தால், ஒவ்வொரு பங்கும் $\frac{1}{8}$ என்னும் பின்னவெண்ணைக் குறிக்கின்றதெனக் கூறுகின்றோம். ஆயின், ஒவ்வொரு பிள்ளையும் 1 பழமும் $\frac{1}{8}$ பழமும் பெறும். ஒவ்வொரு பழத்தையும் 8 பங்குகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் 9 பங்குகளைக் கொடுப்பதாலும் பங்கீடு செய்யப்படலாம். இவ்வண்ணம் $1+\frac{1}{8} = 9 \times \frac{1}{8}$; இது $1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ என எழுதப்படும்.

இது பின்னவெண்ணின் வரைவிலக்கணத்திற்கு வழிகாட்டுகின்றது. m, n என்பன இரு நேர் முழுவெண்களாகுக. ஒவ்வொரு பொருளும் 1 என்னும் முழுவெண்ணைக் குறிக்கும் ஒத்த பொருட்கூட்டமொன்றை வைத்திருக்கின்றோமெனக் கொள்க. ஒவ்வொரு பொருளும் n சம பங்குகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், அத்தகைய பங்குகளுள் m என்பன ஒருங்கு எடுக்கப்பட $\dfrac{m}{n}$ என்னும் பின்னவெண்ணைக் குறிக்குமெனப்படும். இனி, p என்பது யாதுமொரு நேர் முழுவெண்ணாகுக; ஒவ்வொரு பொருளும் np பங்குகளாகப் பிரிக்கப்படுக; அவற்றுள் mp பங்குகள் எடுக்கப்படுக. ஆயின், இந்த mp பங்குகள் ஒருங்கு சேர்ந்து முன் சிந்திக்கப்பட்ட m பங்குகளுக்குச் சமமாகும். ஆகவே,

$$\frac{m}{n} = \frac{mp}{np}.$$

m என்பது n இன் யாதுமொரு மடங்காயின் ($m = kn$ என்க; இங்கு k என்பது ஒரு முழுவெண்), முன் சிந்திக்கப்பட்ட m பங்குகளின் கூட்டம் k முழுப் பொருள்களுக்குச் சமமாகும்; ஆகவே $\dfrac{m}{n}$ என்னும் பின்னம் இந்நிலைமையில் ஒரு முழுவெண்ணாகும். சிறப்பு வகையில், $\dfrac{m}{1} = m$.

m என்பது n இன் மடங்கல்லாததாய் n இலும் பெரிதாய் இருந்தால், $m = rn + s$; இங்கு, r, s என்பன நேர் முழுவெண்கள்; $s < n$; m பங்குகளின் தொகுதி $\dfrac{s}{n}$ என்னும் எண்ணைக்குறிக்கும் பங்குக் கூட்டத்தோடு r முழுப் பொருள்களுக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \frac{rn+s}{n} = r + \frac{s}{n}.$$

$\dfrac{m}{r} = \dfrac{qm}{qn}$ ஆயும் $\dfrac{p}{q} = \dfrac{pn}{qn}$ ஆயும் இருக்கின்றமையால்,

$qm = pn$ ஆயினுற்றுன், $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ என்னும் இரு பின்னங்கள் சமமாகும்.

அன்றியும் $mq > pn$ ஆயின், $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$;

$mq < pn$ ஆயின், $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$;

கூட்டல் : $\frac{m}{n} = \frac{qm}{qn}$, $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$;

∴ பின்னவெண்ணின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+pn}{qn}$$

என்பது பெறப்படும்.

பெருக்கல் :

ஒவ்வொரு பொருளும் முழுவெண் 1 ஐக் குறிக்கின்ற ஒத்தபொருட் கூட்டம் ஒன்றை நினைக்க. ஒவ்வொரு பொருளும் q சம பங்குகளாகப் பிரிக்கப்படுக ; அவற்றுள் p பங்குகள் ஒரு பொருளாகும் வண்ணம் ஒருங்கு வைக்கப்படுக. அவ்விதமான பொருள் $\frac{p}{q}$ என்னும் எண்ணைக் குறிக் கும். இனி, ஒவ்வொரு பொருளும் $\frac{p}{q}$ என்னும் எண்ணைக் குறிக்கின்ற ஒத்த பொருட்கூட்டம் ஒன்றை நினைக்க. அவ்விதமான பொருள் ஒவ்வொன் றும் n சமபங்குகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், அவ்விதமான m பங்குகள் ஒருங்கு எடுக்கப்பட $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ என்னும் பெருக்கத்தைக் குறிக்குமெனப்படும்.

மேற்கூறிய செய்கை ஆரம்பத்திற் கூறிய பொருள்கள் ஒவ்வொன்றையும் qn சம பங்குகளாகப் பிரித்து அவற்றுள் pm பங்குகளை எடுப்பதற்குச் சமம் என்பது தெளிவு.

$$\therefore \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

a, b, c என்பன மூன்று பின்னவெண்களாயிருக்க, $a > b$ ஆயின், $ac > bc$.

$a = \frac{p}{q}$ ஆயும் $b = \frac{r}{s}$ ஆயும் $c = \frac{m}{n}$ ஆயும் இருக்க;

இங்கு p, q, r, s, m, n என்பன நேர்முழுவெண்கள்

ஆயின், $ac = \frac{pm}{qn}$, $bc = \frac{rm}{sn}$

$pmsn > qnrm$ ஆயின், அதாவது $ps > qr$ ஆயின், $ac > bc$.
$a > b$ ஆயின், $ps > qr$.

$$\therefore ac > bc.$$

வகுத்தல். a, b என்பன இரு பின்னவெண்களாயிருக்க, $bc = a$ ஆயின், $c = \frac{a}{b}$ என எழுதுகின்றேம்.

p, q, r, s என்பன நேர் முழுவெண்களாயிருக்க, $a = \frac{p}{q}$ ஆயும் $b = \frac{r}{s}$ ஆயும் இருக்க.

ஆயின், $\frac{r}{s} c = \frac{p}{q}$.

$$\therefore rc = \frac{ps}{q}.$$

$$\therefore c = \frac{ps}{qr}.$$

அதாவது $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr}$.

a, b, k என்பன மூன்று பின்னவெண்களாயின், $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ என்பது பெறப்படும். a, b, c, d என்பன நான்கு பின்னவெண்களாயிருக்க

$ad = bc$ ஆயின், $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$ad > bc$ ஆயின், $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$,

$ad < bc$ ஆயின், $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

கழித்தல். m, n என்பன நேர் முழுவெண்களாக m ஆனது n இலும் பெரிதாய் இருந்தால், n ஓடு p என்னும் ஒரு நேர் முழுவெண்ணைக் கூட்ட அதனுலாகுங் கூட்டுத் தொகை m இற்குச் சமமாகும்படி செய்யலாம் ஆயின், p என்பது m, n என்பனவற்றின் வித்தியாசம் எனப்படும். இதனை $p = m - n$ என எழுதுகின்றேம்.

m பொருள்கள் கொண்ட ஒரு கூட்டத்திலிருந்து n பொருள்களை எடுத்தோமாயின், மீதிக் கூட்டம் $m-n$ என்னும் எண்ணைக் குறிக்கும். r பொருள்கள் கொண்ட வேறொரு கூட்டம் இருக்கின்றதென்றும் அவற்றுள் s பொருள்களை எடுக்கின்றோம் என்றும் நினைக்க ; இங்கு $s<r$ ஆயின், $(m-n)$ பொருள்கள் கொண்ட கூட்டத்தையும் $(r-s)$ பொருள்கள் கொண்ட கூட்டத்தையும் ஒருங்கு வைப்பதாலாய கூட்டம் ஆரம்பத்திலுள்ள m பொருட் கூட்டத்தையும் r பொருட் கூட்டத்தையும் ஒருங்கு வைப்பதாலாய கூட்டத்திலிருந்து $(n+s)$ பொருள்களை எடுக்க வருங் கூட்டத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore\ (m-n)+(r-s)=(m+r)-(n+s).$$

முன் n பொருள்களையும் பின் s பொருள்களையும் எடுப்பதால், $(n+s)$ பொருள்கள் அகற்றப்படலாம்.

$$\therefore\ (m-n)+(r-s)=(m+r)-(n+s)=m+r-n-s.$$

a, b என்பன பின்னவெண்களாயிருக்க $a>b$ ஆயின், $b+c=a$ ஆகும் வண்ணம் c என்னும் ஒரு பின்னங் காணப்படலாம் ; அதனை $c=a-b$ என எழுதுகின்றோம்.

a, b, p, q என்பன நான்கு பின்னங்களாயிருக்க $a>b$ ஆயும் $p>q$ ஆயும் இருந்தால்,

$$(a-b)+(p-q)=(a+p)-(b+q)=a+p-b-q$$

என்பது பெறப்படும்.

மறையெண்கள். m, n என்பன நேர் முழுவெண்களாய் அல்லது பின்னங்களாய் இருக்க, $m<n$ ஆயின், $p+n=m$ ஆகுமாறு யாதுமொரு நேரெண் p இல்லை எனினும், இந்நிலைமையிலும் $m-n$ என்பதற்கு ஒரு கருத்துக் கொடுத்தல் வசதியாகும்.

உதாரணமாக ஒரு மனிதன் 100 ரூபா முதலோடு வியாபாரஞ் செய்யத் தொடங்குகிறானெனக் கொள்க. அவன் 125 ரூபா நயமடைந்தானாயின், அவனுடைய பெறுமதி (100+125) ரூபா ஆகும். அவன் 50 ரூபா நட்ட மடைந்தானாயின், அவனுடைய பெறுமதி (100 – 50) ரூபா ஆகும். அவன் 125 ரூபா நட்டமடைந்தானாயின் அவனுடைய பெறுமதி (100 – 125) ரூபா எனப்படலாம். உண்மையாக, அவன் யாராயினும் ஒருவரிடமிருந்து 25 ரூபா கடன் வாங்கியிருக்கலாம் ; தன்னிடமுள்ள 100 ரூபாவோடு இப்பணத்தையும் இழந்தவனாவன். இப்போது தனக்குக் கடன்கொடுத்தவனுக்கு 25 ரூபா கொடுக்க வேண்டியவனாகிறான். அவனுடைய பெறுமதி –25 ரூபா என்று கூறலாம். அதற்குக் காரணம் அவன் யாதுமொரு வருமானம் பெற்றவுடன் அவனுடைய கடனைத் தீர்ப்பதற்கு அதிலிருந்து 25 ரூபா கழிக்கப்பட வேண்டும் என்பதே.

இரு மனிதர் சம முதல் கொண்டு வியாபாரஞ்செய்யத் தொடங்கினார் எனக் கொள்க. ஒரு மனிதன் 50 ரூபா நயமும் மற்றையவன் 20 ரூபா நயமும் பெற்றால், அவர்களுடைய நயங்களின் வித்தியாசம் (50–20) ரூபா ஆகும். இவ்வித்தியாசம் இரண்டாம் மனிதனின் உடைமைப் பொருளிலும் முதலாம் மனிதனின் உடைமைப் பொருளின் மிகுதியைத் தருகின்றது. முதலாம் மனிதன் 50 ரூபா நயமடைய இரண்டாம் மனிதன் 20 ரூபா நட்டமடைந்தானாயின், முதலாம் மனிதன் மற்றையவனிலும் (50+20) ரூபா கூடுதலாக வைத்திருப்பான். 20 ரூபா நட்டம் என்பதை –20 ரூபா நயம் எனக் கொண்டால் அவர்களுடைய நயங்களின் வித்தியாசம் {50 – (–20)} ரூபா என்பதாற் குறிக்கப்படலாம். எளிய அடைப்புக்களை நீக்கி சயக் குறிகள் இரண்டிற்கும் பதிலாக ஒரு சகக் குறியைப் பிரதியிட்டால், இது உண்மையான செய்தியோடு பொருந்தும். அம்மனிதன் முன் 50 ரூபா நயமடைந்து பின் 20 ரூபா நட்டமடைந்தானாயின், அவனது ஈற்று நயம் (50–20) ரூபா ஆகும். அந்நட்டம் மறை நயமாகக் கொள்ளப்படின், அவனது ஈற்று நயம் {50+(–20)} ரூபா ஆகும் ; எளிய அடைப்புக்களை நீக்கி சக சயக் குறிகளுக்குப் பதிலாக ஒரு சயக் குறியைப் பிரதியிட்டால் இது உண்மையான செய்தியோடு பொருந்தும். ஆகவே, இரண்டு அடுத்துள சயக் குறிகள் ஒரு சகக்குறிக்குச் சமமென்றும் ஒரு சகக்குறியும் ஒரு அடுத்துள சயக்குறியும் ஒரு சயக்குறிக்குச் சமமென்றுங் கொள்ள வேண்டும்.

இச்சிந்தனைகள் மறையெண்களின் வரைவிலக்கணத்தைக் காண்பதற்கும் அவற்றின்மீது செய்தற்குரிய செய்கை விதிகளை ஆக்குதற்கும் வழிகாட்டுகின்றன. m, n என்பன $m<n$ ஆகவுள்ள நேர் முழுவெண்களாய் அல்லது நேர்ப் பின்னவெண்களாயிருந்தால், $m-n$ என்பது மறையெண் எனப்படும். p என்பது $n-m$ இற்குச் சமமான நேரெண்ணாயின் $m-n=-p$ என எழுதுகின்றோம்.

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்பனவற்றிற்குப் பின்வரும் விதிகளைக் கொடுக்கின்றோம் :—

(i) $-p+(-q)=-(p+q)=-p-q.$

(ii) $-p-(-q)=-p+q=-(p-q).$

(iii) $(-p)\times(-q)=pq,\ (-p)\times q=-(pq).$

(iv) $\dfrac{-p}{-q}=\dfrac{p}{q},\ \dfrac{-p}{q}=-\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p}{-q}.$

இவ்வரைவிலக்கணங்களிலிருந்து பின்வருஞ் சமனிலிகளைப் பெறுகின்றேம் :—

(i) a, b என்பன $a>b$ யாகவுள்ள இரு நேரெண்களாயின், $-a<-b$

(ii) a, b என்பன $a>b$ யாகவுள்ள இரு நேரெண்களாய் அல்லது மறையெண்களாயிருக்க, k என்பது யாதுமொரு நேரெண்ணுயின், $ka>kb$, அன்றி k என்பது மறையெண்ணுயின், $ka<kb$.

(iii) a, c என்பன எவையேனும் இரு நேரெண்களாய் அல்லது மறையெண்களாய் இருக்க, b, d என்பன $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ ஆகவுள்ள இரு நேரெண்களாய் இருந்தால், $ad>bc$.

(iv) a, b, c, d என்பன $a>b$ யாயும் $c>d$ ஆயுமுள்ள நேரெண்களாய் அல்லது மறையெண்களாய் இருந்தால், $a+c>b+d$.

(v) a, b, c, d என்பன $a>b$ ஆயும் $c<d$ ஆயுமுள்ள எண்களாயின் $a-c>b-d$.

பூச்சியம் என்னும் எண்.

ஒரு பெட்டிக்குள் 5 ஒத்த பொருள்கள் இருக்கின்றன என்றும் அந்த 5 பொருள்களேயும் அப்பெட்டியிலிருந்து யாராயினும் ஒருவர் நீக்குகிருர் என்றுங் கொள்க. ஆயின், அப்பெட்டியிலே மீந்துள்ள பொருள்களினுடைய தொகை பூச்சியம் எனக் கூறுவதும் $5-5=0$ என எழுதுவதும் வசதியாகும். இப்பொழுது நான்கு பொருள்கள் அப்பெட்டியிற்குள் இடப்படின், அப்பெட்டியிற்குள்ளே உள்ள பொருள்களுடைய தொகை 4 ஆகும் ; ஆயின், $0+4=4$ என எழுதலாம். இனி, 3 வெறும் பெட்டிகள் எங்களிடம் உண்டெனின், அம்மூன்று பெட்டிகளுக்கும் உள்ளே கிடக்கும் பொருள்களுடைய தொகை பூச்சியமாகும் ; ஆயின், $3\times 0=0$ என்பது. இவ்வண்ணமாகப் பூச்சியம் என்னும் எண்ணுக்குரிய பின்வருஞ் செய்கை விதிகளைத் தருகின்றேம்.

a என்பது நேரெண் மறையெண்களுள் ஒன்றுயும் முழுவெண் பின்னவெண்களுள் ஒன்றுயுமுள்ள யாதும் ஓரெண்ணுயின்,

$$\text{(i)}\ a-a=o,$$

$$\text{(ii)}\ a+o=a,$$

$$\text{(iii)}\ a\times o=o.$$

a, b என்பன $a\times b=o$ ஆயுள்ள இரண்டு எண்களாயின், அவற்றுள் ஒன்றுயினும் பூச்சியமாதல் வேண்டும் என்பது இதிலிருந்து பெறப்படும்.

மேலே தந்த (iii) விதியோடு இசைவாய் $\frac{a}{0}$ என்பதற்குக் கருத்துக் கொடுத்தல் இயலாதாகையால், பூச்சியத்தால் வகுத்தல் இங்கு சிந்திக்கபடவில்லை.

இதுவரைக்குஞ் சிந்திக்கப்பட்ட எண்கள் விகிதமுறுமெண்கள் எனப்படும். அவற்றை m உம் n உம் முழுவெண்களாயும் அதனேடு n நேரெண்ணுயுமுள்ள $\frac{m}{n}$ என்னும் வடிவத்திற் கூறலாம். முழுவெண் m இனுடைய நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு நேரெண்களும் மறைப் பெறுமானங்களுக்கு மறையெண்களும் பெறப்படும். $\frac{m}{n}$ என்னும் எண் மறையாயும் $-p$ யிற்குச் சமமாயும் இருந்தால், p என்பது அவ்வெண்ணின் எண் பெறுமானம் என்றுதல், தனிப் பெறுமானம் என்றுதல், மட்டு என்றுதல் கூறப்படும். அதனை $\left|\frac{m}{n}\right|=p$ என எழுதுகின்றேம். m இன் பூச்சியப் பெறுமானமுஞ் சிந்திக்கப்படுகின்றது. $m=o$ ஆகும்பொழுது $\frac{m}{n}$ என்னும் எண் பூச்சியமாகும். $n=o$ ஆகும்பொழுது m இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் $\frac{m}{n}$ என்பது பொருளின்றி நிற்கும்.

விகிதமுறுமெண்கள். செய்முறை நோக்கங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் விகிதமுறும் எண்கள் போதியவையாகும். ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்துச் சதுரம் ஏனைய பக்கச் சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்னுங் கேத்திரகணிதத் தேற்ற விவரணத்தைப் **பைதகரஸ்** என்பவர் தரும் வரைக்குங் கணிதத்தில் வேறு பிறவெண்கள் அறியப்படவில்லை. எண்களின் சிறந்த ஒரு பிரயோகம் நீளங்களை அளத்தலில் உள்ளது. இத்தேற்றம் வெளியாக்கப்படுமுன் யாதுமொரு நீளத்தை ஒரு விகிதமுறுமெண்பற்றி அளக்கலாம் என்பது கற்பிக்கப்பட்டுள்ளது. **பைதகரஸ்** என்பவர் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமல்லாத ஏனைய இரு பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஓரலகு நீளமுடையதாயின் செம்பக்க நீளத்தை ஒரு விகிதமுறும் எண் பற்றி உணர்த்தல் இயலாதெனக் காட்டியுள்ளார். அத்தகையெண் x என்பது ஒன்று உண்டெனின் அது $x^2=2$ என்னுந் தொடர்பைத் தீர்க்க வேண்டும். அத்தகைய விகிதமுறுமெண் யாதுமில்லை என்பது எளிதிற் புலனுகும். ஒரு விகிதமுறுமெண் முழுவெண்ணுகாது விடின், அதன் வர்க்கமும் முழுவெண்ணுகாது ; ஒரு விகிதமுறுமெண் 2 இலும் பெரிதாய் அல்லது அதற்குச் சமனுயிருந்தால், அதன் வர்க்கம் 2 இலும் பெரிதாகும் ; ஒரு விகிதமுறுமெண்ணு

ணது நேரெண்ணுயும் 1 இனுஞ் சிறிதாயுமிருந்தால், அதன் வர்க்கமும் 1 இனுஞ் சிறிதாயிருக்கும். எனின், தன் வர்க்கம் 2 ஆயுள்ள விகிதமுறு மெண் யாதுமில்லை எனலாம். ஆகவே, விகிதமுருவெண்களை ஏற்படுத்த வேண்டிய நிலைமை உண்டாகின்றது. ஒவ்வொன்றும் ஓரலகு நீளமுடைய இரு பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்க நீளத்தைக் குறிக்கின்ற ஓரெண் **உண்டெனக்** கற்பனை செய்கின்ருேம். அதனை $\sqrt{2}$ எனக் குறித்து விகிதமுரு எண்ணெனப் பெயரிடுகின்ருேம். ஒவ்வொரு பக்கமும் 2 அலகு நீளமுள்ள ஒரு சதுரத்தை வரைந்தால், அச்சதுரத்தின் பரப்பளவு 2 சதுரவலகுகளாகும். வேறு நேர் விகிதமுரு வெண்கள் எவைக்கும் பைதகரசினது தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கேத்திரகணித முறைபற்றி வரைவிலக்கணங்கள் கூறலாம். x அலகு நீளமுள்ள AB என்னும் நேர்கோட்டை C யிற்கு BC யினது நீளம் y யாக நீட்டிஞல், AC யினது நீளம் $x+y$ என வரைவிலக்கணங் கூறப்படுகின்றது. அடுத்துள இரண்டு பக்கங்கள் x அலகு நீளமும் y அலகு நீளமுமாயுள்ள ஒரு செவ்வகம் வரையப்பட்டால், அதன் பரப்பளவு xy சதுரவலகென வரைவிலக்கணங் கூறப்படுகின்றது. பின்னர், கழித்தல் வகுத்தல்களானவை முறையே கூட்டல் பெருக்கல்களினுடைய நேர்மாருன செய்கைகளென வரைவிலக்கணங் கூறப்படுகின்றது. அதன்பின் மறை விகிதமுருவெண்கள் ஆரம்பிக்கப்படுகின்றன ; விகிதமுறுமெண்களுக்குரிய செய்கை விதிகள் விகிதமுருவெண்களுக்கும் பொருந்தும்படி விரிக்கப்படுகின்றன.

மெய்யெண்கள்.—விகிதமுறுவனவும் உருதனவுமாகிய எண்களெல்லாம் மெய்யெண்களினுடைய தொடரகத்தை ஆக்குகின்றன எனப்படும். எவையேனும் இரு மெய்யெண்களுக்கிடையே விரும்புகின்ற தொகையளவு விகிதமுறும் எண்களையும் விகிதமுருவெண்களையும் காணலாமெனக் கற்பிக்கின்ருேம். விகிதமுருவெண்களைக் கொண்ட செய்முறைக் கணிப்புக்களில், அண்ணளவுப் பெறுமானங்களே வேண்டிய விடத்து, வேண்டிய செம்மைப் படிக்குத் தக்கவாறு ஒரு விகிதமுருவெண்ணுக்குப் பதிலாகத் தக்கவொரு விகிதமுறுமெண்ணைப் பிரதியிடுகின்ருேம். உதாரணமாக, $\sqrt{2}$ என்பதை முதலாந் தசமதானத்திற்குச் செம்மைப்படுத்த வேண்டின், 1·4 ஆலும், மூன்ருந் தசமதானத்திற்குச் செம்மைப்படுத்த வேண்டின், 1·414 ஆலும் பதிலிடலாம்.

m, n என்பன முழுவெண்களாயின், $\dfrac{m}{n}$ என்னும் விகிதமுறுமெண்ணுனது $nx-m=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலமாகும். இச்சமன்பாடு x இன் முதலாம் படியிலுள்ளது ; n, m என்னும் முழுவெண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்டது. $\sqrt{2}$ என்னும் விகிதமுருவெண் $1, -2$

என்னும் முழுவெண் குணகங்களோடு x இன் இரண்டாம் படியிலுள்ள $x^2-2=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றது. $3-\sqrt{2}$ என்னும் விகிதமுருவெண் $1, -6, 7$ என்னும் முழுவெண் குணகங்களோடு x இன் இரண்டாம் படியிலுள்ள $(x-3)^2=2$ அல்லது $x^2-6x+7=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றது. இவ்விதமான பண்புள்ள எண்கள் **அட்சரகணிதவெண்கள்** எனப்படும். ஓரட்சரகணிதவெண்ணுனது $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஓரட்சரகணிதச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும். இங்கு n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுகவும் $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பன நேர் அல்லது மறை முழுவெண்களாகவும் உள்ளன. விகிதமுறும் எல்லாவெண்களும் அட்சரகணிதவெண்களாகும். அட்சரகணிதவெண்களாகிய விகிதமுருவெண்களையும் விரும்புகின்ற தொகையளவு காணலாம். அட்சர கணிதவெண்களாகா விகிதமுருவெண்களையும் விரும்புந் தொகையளவு காணலாம். ஓர் உயர்ந்த உதாரணம் π என்னும் எண்ணுகும். அதன் அண்ணளவுப் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ ஆகும். அதனுடைய திருத்தமான பெறுமானம் முழுவெண் குணகங்களோடு கூடிய யாதுமோரட்சரகணிதச் சமன்பாட்டின் மூலமாகாது. இவ்விதமான எண்கள் **கடந்தவெண்கள்** எனப்படும்.

சுட்டி விதி.— a என்பது ஒரு மெய்யெண்ணுயும் n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயும் இருந்தால், a^n என்பது n காரணிகளுக்குத் தொடர்ந்த $a\times a\times a\ldots.$ என்னுந் தொடர்ந்த பெருக்கத்தைக் குறிக்கும். இவ்வரைவிலக்கணத்திலிருந்து சுட்டி விதி மூன்றும் நேரே பெறப்படும்.

m, n என்பன நேர் முழுவெண்களாயும், a, b என்பன மெய்யெண்களாயும் இருந்தால்,

(i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$,

(ii) $(a^m)^n=a^{mn}$,

(iii) $(ab)^n=a^nb^n$.

n என்பது ஒரு மறை முழுவெண்ணுயும் a என்பது பூச்சியமல்லாததாயும் இருந்தால், பின்வருமாறு a^n இற்கு வரைவிலக்கணங் கொடுக்கின்ருேம் ; $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{a}\times\ldots.(-n)$ காரணிகளுக்கு.

m, n என்பன நேர் முழுவெண்களாயிருந்தாலும் அன்றி மறை முழுவெண்களாயிருந்தாலும் மேற்கூறிய மூன்று விதிகளும் உண்மையாகுமென மெய்மைப்படுத்தலாம்.

இனி, விகிதமுறு சுட்டியின் வரைவிலக்கணத்தைக் கொடுப்போம். a என்பது ஒரு நேரெண்ணையும் p என்பது யாதுமொரு முழுவெண்ணையும் இருந்தால், a^p என்பது நேரெண்ணாகும். q என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருந்தால், $b^q = a^p$ அதாவது b என்பது a^p இன் q ஆம் மூலமாகும்படி b என்னும் ஒரு நேர் முழுவெண் உண்டு எனக் கற்பிக்கப்படுகின்றது. q என்பது இரட்டையெண்ணாயின், $(-b)^q$ என்பதும் a^p இற்குச் சமன். q என்பது இரட்டையெண்ணாயிருந்தாலும், அன்றி ஒற்றை எண்ணாயிருந்தாலும் a^p இனது q ஆம் நேர் மூலம $a^{\frac{p}{q}}$ ஆலும், மறை மூலம் ஒன்று உண்டெனின் அது $-a^{\frac{p}{q}}$ ஆலுங் குறிக்கப்படும். a என்பது மறையாயிருக்க p இரட்டையாயின், a^p என்பது நேரெண்ணையும் $a^{\frac{p}{q}}$ என்பது a^p இன் q ஆம் நேர் மூலத்தைக் குறிக்கும் ஒன்றாயும் இருக்கும். a என்பது மறையாயும் p என்பது ஒற்றையாயும் இருந்தால், a^p என்பது மறையாகும் ; அதனோடு q இரட்டையாயின், $b^q = a^p$ ஆகுமாறு b யிற்கு யாதுமொரு பெறுமானமுமில்லை. a என்பது மறையாயும் p, q என்னும் இரண்டும் ஒற்றையெண்களாயும் இருந்தால் $b^q = a^p$ ஆகுமாறு b யிற்கு ஒரு மறைப் பெறுமானமே உண்டு ; இம்மறைப் பெறுமானம் $a^{\frac{p}{q}}$ என்பதனாற் குறிக்கப்படும். இவ்வாறு $a^{\frac{p}{q}}$ என்பதற்கு வரைவிலக்கணங் கொடுத்தால், எல்லா வகைகளிலும்

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p.$$

இப்பொழுது, முழுவெண் சுட்டிகளுக்கு உண்மையாகும் மூன்று விதிகளும் பின்னச் சுட்டிகளுக்கும் உண்மையாகும்படி விரிந்து நிற்கும் எனக் காட்டுவோம்.

(i) p, q, r, s என்பன முழு எண்களாயிருக்க அவற்றுள் q, s என்பன நேராயின்,

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = k \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $k^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs} \times \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs}$ (மூன்றாம் முழுவெண் சுட்டி விதியால்,)

இனி, இரண்டாஞ் சுட்டி விதியால்,

$$k^{qs} = \left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right\}^s \times \left\{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^s\right\}^q$$

$$(a^p)^s \times (a^r)^q \qquad \text{வரைவிலக்கணத்தால்}$$

$$= a^{ps} \times a^{qr} = a^{ps+qr} \qquad \text{முதலாஞ் சுட்டி விதியால்.}$$

$$\therefore\ k = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

(ii) p, q, r, s என்பன முழு எண்களாயிருக்க, அவற்றுள் q, s என்பன நேராயின்,

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}.$$

$$k = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $k^s = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r$ வரைவிலக்கணத்தால்,

$$\therefore\ k^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qr} = \left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right\}^r$$

$$= (a^p)^r = a^{pr}.$$

$$\therefore\ k = a^{\frac{pr}{qs}}.$$

(iii) p, q என்பன முழு எண்களாயிருக்க, அவற்றுள் q என்பது நேராயின்,

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}.$$

$$k = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $k^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q . \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p b^p = (ab)^p$

$$\therefore\ k = (ab)^{\frac{p}{q}}.$$

a^0 இன் கருத்து.

a என்பது ஒரு மெய் எண்ணுகுக ; a^m என்பது ஒரு மெய் எண்ணுய் இருக்கும்படி m என்பது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணுகுக. ஆயின், முதலாம் விதிப்படி,

$$a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0.$$

ஆனல் $$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

ஆகவே, $$a^m \times a^{-m} = 1.$$

$\therefore$ பூச்சியமல்லாத a யினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $a^0 = 1.$

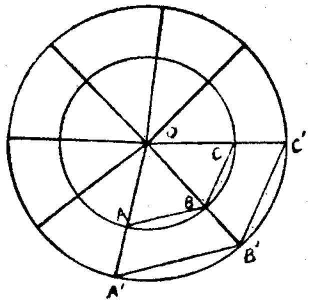
திரிகோணகணிதம்

அத்தியாயம் 1

கோணங்களின் அளவீடு.—ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்ற இரு நேர்கோடுகள் ஒரு கோணத்தை வரையறுக்கின்றன. ஒரு கோணத்தின் பருமனை அளப்பதற்குரிய அலகு **சட்டிமமுறையிற்** பாகையாகும். O வென்பது A, B என்பனவற்றிற்கு இடையே AOB என்பது ஒரு நேர்கோடாகுமாறு கிடந்தால் OA, OB என்பன ஆக்கும் கோணத்தின் பருமன் 180 பாகை என வரையறுக்கப்படுகின்றது. மேலும், ஒரு பாகை 60 கலையாகவும் ஒரு கலை 60 விகலையாகவும் பிரிக்கப்படுகின்றன.

வட்டமுறையளவுக்குரிய அலகு **ஆரையன்** எனப்படும்.

O என்னும் ஒரே மையத்தையும், r, r' என்னும் ஆரைகளையும் உடைய இரு வட்டங்களை நினைக்க.



O வினூடாக மூன்று நேர்கோடுகள் வரைக. அவை அவ்வட்டத்தை (A, A'), (B, B'), (C, C') என்பனவற்றிற் சந்திக்க.

இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{r}{r'}.$$

$$\therefore \frac{AB+BC}{A'B'+B'C'} = \frac{r}{r'}.$$

O வினூடாக ஒரு பெருந்தொகை நேர்கோடுகள் வரையப்பட்டனவாகவும் அவை அவ்வட்டங்களுடைய பரிதிகளை ஒரு பெருந்தொகையான சிறுவிற்களாகப் பிரிக்கின்றனவாகவுங் கொள்க. அப் பரிதிகளைப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைத் தம்முச்சிகளாகக் கொண்ட அவ்விரு வட்டங்களினுடைய உட்பல்கோணிச் சுற்றளவுகள் p, p' என்பனவாயின்,

$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$, அல்லது $\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'}$ என்பது பெறப்படும்.

சிறுவில் ஒவ்வொன்றினுடைய நீளமும் வரையறையின்றிச் சிறிதாகும் வண்ணம் பிரிவுத் தொகைகளை வரையறையின்றிக் கூட்டினால், p என்பது r என்னும் ஆரையையுடைய வட்டத்தின் பரிதிநீளத்தையும், p' என்பது r' என்னும் ஆரையையுடைய வட்டத்தின் பரிதிநீளத்தையும் அணுகும். ஆகவே, யாதும் ஒரு வட்டத்தில் அதன் பரிதி நீளத்திற்கும் ஆரைக்குமுள்ள விகிதம் ஒரே எண்ணெனக் கொள்கின்றோம். இவ்விகிதம் 2π என்பதனாற் குறிக்கப்படுகின்றது ; π இன் பெறுமானம் அண்ணளவாக $\frac{22}{7}$ இற்குச் சமமெனக் காணப்பட்டுள்ளது.

இதனைப் போன்ற நியாயம் ஒன்றால், மேற்காட்டிய படத்தில்,

$$\frac{\text{வில் } AB}{r} = \frac{\text{வில் } A'B'}{r'}$$

என்பதும் பெறப்படுகின்றது.

$\therefore$ வில் $AB = r$ ஆயின், வில் $A'B' = r'$.

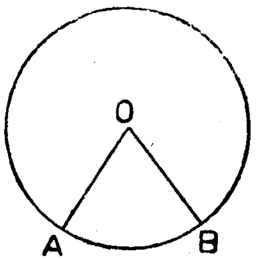
$\therefore$ யாதும் ஒரு வட்டத்தில் அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுள்ள வில்லால் அதன் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படுங் கோணம் ஒரேயளவினதாகும். இக்கோணம் அளவீட்டலகு எனக் கொள்ளப்பட்டு **ஓர் ஆரையன்** எனக் கூறப்படும்.

AB என்பது r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஒரு வில்லாகுக ; அவ்வில் θ ஆரையனுக்குச் சமனான ஒரு கோணத்தை மையத்தில் எதிரமைக்க ஒரு வட்டத்தின் வில்லொன்றால் அதன் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படுங் கோணம் அவ்வில்லின் நீளத்திற்கு விகிதசமமாகையால், AB என்னும் வில்லின் நீளம் $r\theta$ என்பது பெறப்படும். பரிதியின் முழுநீளம் $2\pi r$ ஆகையாலும், அது மையத்தில் 360 பாகையை எதிரமைக்கின்றமையாலும்,

$$360° = 2\pi \text{ ஆரையன்கள்.}$$

ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு.

AB என்பது O வென்பதை மையமாகவுள்ள ஒரு வட்ட வில்லாகுக. வில் AB யாலும் ஆரைகள் OA, OB என்பனவற்றாலும் வரைப்புற்ற படம் அவ்வட்டத்தின் ஆரைச்சிறை எனப்படும். AOB என்னுங் கோணத்தின் பருமன் θ ஆரையனாகுக ; அவ்வட்டத்தின் ஆரை r ஆகுக. P, Q, R, . . . என்னும் பிரிவுப் புள்ளிகளை ஏற்படுத்தி அவ்வில்லை ஒரு பெருந்தொகையான சம விற்களாகப் பிரிக்க. AP, PQ, QR . . . என்னும் நாண்களைத் தொடுக்க.



p என்பது AP, PQ, QR . . . என்னுஞ் சம நாண்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் O விலிருந்து வரைந்த செங்குத்தாகுக.

முக்கோணி OAP யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, p.AP$.
முக்கோணி OPQ வின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, p.PQ$.
இவ்வாறே ஏனைய முக்கோணிகளுக்குங் காணலாம்.
எல்லா முக்கோணிகளுடைய பரப்பளவுக் கூட்டுத்தொகை
$= \frac{1}{2}\, p(AP+PQ+QR+\ .\ .\ .\ )$.

பிரிப்புத் தொகை வரையறையின்றிக் கூட்டப்பட, p என்பது வட்டத்தின் ஆரையையும் அடைப்புகளுக்குள்ளேயுள்ள தொகையானது வில் AB யினது நீளத்தையும் அணுகும். எனின், ஆரைச்சிறை AOB யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}rr\theta = \frac{1}{2}r^2\theta$ எனக் கொள்கின்றோம்.

ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு கோணத்தின் குறி.

OA, OB என்பன ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர்கோடுகளாகுக. திசை OB என்பது திசை OA யோடு கோணம் AOB என்பதை ஆக்குகின்றது. OA யிற்கு எதிர்ப்பக்கத்திற் கிடக்கும் ஒரு கோடு OA யோடு அதே கோணத்தை உண்டாக்கல் இயலும். இவ்விரு வகைகளையும் வேறுபிரித்தறிய வேண்டுமாகையால், ஒரு கோணத்தின் குறிக்கு ஒரு வழக்கை ஆளுவோம். OB யானது OA யோடு ஆக்குங் கோணம், OA யிலிருந்து OB யிற்குச் சுழலும் போக்கு இடஞ்சுழியாயின், நேரென்றும், வலஞ்சுழியாயின் மறையென்றுங் கொள்ளப்படும்.

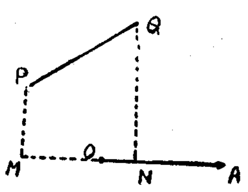
OB யானது OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக ; இங்கு θ வானது நேர் அல்லது மறை. ஒரு கோடு OA யோடு பொருந்தி நின்று புறப்பட்டு θ என்னுங் கோணத்திற்கூடாகச் சுழன்றால், அது OB என்னும் நிலையை அடையும். அது இன்னும் 2π ஆரையன் அல்லது -2π ஆரையனுக்கூடாகச் சுழன்றால், அது இன்னும் ஒரு முறை OB என்னும் நிலையை அடையும். பொதுவாக, அது OB என்னும் நிலையிலிருந்து $2n\pi$ யென்னும் ஒரு கோணத்திற்கூடாகச் சுழன்றால், அது மறுபடியும் OB யென்னும் நிலையை அடையும் ; இங்கு n என்பது யாதும் ஒரு முழுவெண். எனின், n என்பது யாதுமொரு முழுவெண் அல்லது பூச்சியமாயிருந்தால், OB யால் OA யோடு ஆக்கப்படுங் கோணம் $2n\pi+\theta$ வெனக் கொள்ளலாம்.

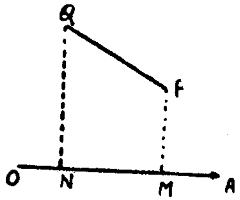
OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் OA யானது OB யோடு ஆக்கும் அதே கோணமாகாது என்பது அறியப்படவேண்டும். OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் இடஞ்சுழிப் போக்கில் இருந்தால், OA யானது OB யோடு ஆக்குங்கோணம் வலஞ்சுழிப் போக்கில் இருக்கும். OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் வலஞ்சுழிப் போக்கில் இருந்தால், OA யானது OB யோடு ஆக்குங்கோணம் இடஞ்சுழிப் போக்கில் இருக்கும். எனின் OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் θ வாயிருந்தால் OA யானது OB யோடு ஆக்குங் கோணம் $-\theta$ வாகும்.

3—R 11681 (1/66)

நிமிர்கோண எறியம்

OA, *PQ* என்பன இரு நேர்கோடுகளாகுக. *M*, *N* என்பன *P*, *Q* என்பனவற்றிலிருந்து *OA* யின்மீது வரைந்த செங்குத்துக்களினுடைய அடிகளாயின், *MN* என்பது *OA* மீது *PQ* வின் **நிமிர்கோண எறியம்** எனப்படும். *M*, *N* என்பன *OA* யின்மீது அல்லது நீட்டிய *AO* வின் மீது கிடக்கலாம். *MN* என்பது *OA* யோடு ஒரு போக்காயிருந்தால் அவ்வெறியம் நேரென்றும், அன்றெனின் மறையென்றுங் கொள்ளப்படும். அவ்வெறியத்தின் பருமன் *MN* இன் உண்மையான நீளமாகும்.

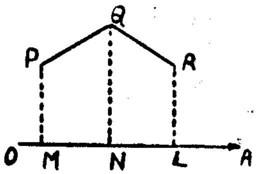




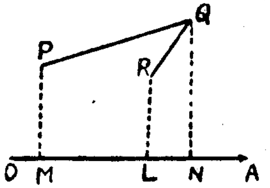
அவ்வெறியம் படம் 1 இலே நேராயும் படம் II இலே மறையாயும் உள்ளது. *MN* இன் உண்மையான நீளம் படம் II இல் 5 அலகாயின், அவ்வெறியம் -5 ஆகும்.

குறிபற்றிய இவ்வழக்கிலிருந்து *OA* மீது *PQ*, *QP* என்பனவற்றினுடைய எறியங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என்பது பெறப்படும்.

P, *Q*, *R* என்பன எவையேனும் மூன்று புள்ளிகளாகுக. *M*, *N*, *L* என்பன *OA* யின் மீது *P*, *Q*, *R* என்பனவற்றிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக்களினுடைய அடிகளாகுக.



படம் I



படம் II

PQ வின் எறியம் $+$ *QR* இன் எறியம் $= MN+NL$.

படம். I இல் *MN*, *NL* என்னும் இரண்டும் நேர் ; அன்றியும் $MN+NL = ML$. படம். II இல் *MN* நேராயும் *NL* மறையாயுமுள்ளன ; ஆகவே, $MN+NL=ML$.

PR இன் எறியம் *ML* ஆகும்.

∴ எல்லா வகைகளிலும்,

PQ வின் எறியம்$+QR$ இன் எறியம் $= PR$ இன் எறியம்.

இம்முடிவு எத்தொகையான நீளங்களுக்கும் பொருந்தும்படி விரியும் என்பது தெளிவு.

P_1, P_2, . . . , P_n என்பன *n* புள்ளிகளாயின்,

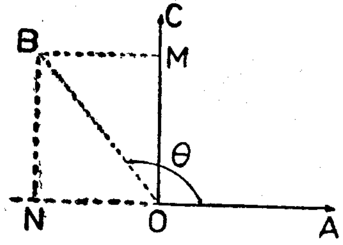
P_1P_2 இன் எறியம் $+P_2P_3$ இன் எறியம்$+\ldots+P_{n-1}P_n$ இன் எறியம் $= P_1P_n$ இன் எறியம்.

அத்தியாயம் 2

ஒரு கோணத்தினுடைய திரிகோணகணித விகிதங்கள்.

OA, OB என்பன ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர் கோடுகளாகுக ; OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் θ வாகுக ; இங்கு θ விற்கு எக்குறியும் எப்பருமனும் இருக்கலாம்.

ON என்பது OA மீது OB யின் நிமிர்கோண எறியமாகுக.



N என்பது OA யின்மீது கிடந்தால் இவ்வெறியம் நேராயும் நீட்டிய AO வின்மீது கிடந்தால் மறையாயும் இருக்கும். ON இற்கும் OB யினது நீளத்தினுடைய தனிப் பெறுமானத்திற்குமுள்ள விகிதம் θ என்னுங்கோணத்தின் கோசைன் எனப்படும் ; அது கோசை θ வென எழுதப்படும்; அதாவது, கோசை $\theta = \dfrac{ON}{OB}$; இங்கு ON இற்குப் பருமனுங் குறியுமுண்டு. ஆனால் OB யிற்குப் பருமன் மாத்திரமுண்டு.

B_1 என்பது OB மீதுள்ள வேறொரு புள்ளியாயும், ON_1 என்பது OA மீது OB_1 என்பதன் நிமிர்கோண எறியமாயும் இருந்தால், இயல்பொத்த முக்கோணிகளுடைய பண்புகளால்,

$$\frac{ON}{OB}=\frac{ON_1}{OB_1}.$$

∴ எடுத்துக்கொண்ட OB என்னுங் கோட்டின்மீது B யினுடைய எல்லா நிலைகளுக்கும் $\dfrac{ON}{OB}$ என்பது ஒரே பெறுமானத்தை அடையும். இன்னும், OB யானது OA யோடு ஆக்குங்கோணம் θ என்பது ஒரேயளவினதாயிருக்கும் வரைக்கும் OA, OB என்பனவற்றினுடைய திசைகளும் நிலைகளும் எவையாய் இருந்தாலும் இவ்விகிதம் ஒரே பெறுமானத்தைப் பெறும்.

∴ கோசை θ வானது கோணம் θ வை மட்டுமே சார்ந்து நிற்கும்.

OC என்பது OA யோடு $+\dfrac{\pi}{2}$ ஆரையன் என்னுங் கோணத்தை ஆக்குங் கோடாகுக. OM என்பது OC மீது OB யின் நிமிர்கோணவெறியமாயின், OM இற்கும் OB யினது நீளத்தினுடைய தனிப் பெறுமானத்திற்குமுள்ள விகிதம் θ என்னுங் கோணத்தின் சைன் எனப்படும்; அது சைன் θ வென எழுதப்படும் ; அதாவது, சைன் $\theta = \dfrac{OM}{OB}$; இங்கு

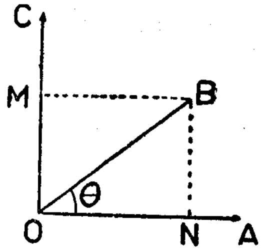
OM இற்குப் பருமனுங் குறியும் உண்டு ; ஆனால், OB யிற்குப் பருமன் மாத்திரம் உண்டு. கோசைன் போலச் சைனும் கோணம் θ என்பதையே சார்ந்து நிற்கின்றமை எளிதிற் புலனாகும்.

சைனுக்குங் கோசைனுக்குமுள்ள விகிதமானது கோணம் θ வினது தான்சன் எனப்படும் ; அது தான் θ வென எழுதப்படும். கோசை θ வினது நிகர்மாற்றனது கோணம் θ வின் சீக்கன் எனக் கூறப்பட்டு சீக θ வென எழுதப்படும் ; சைன் θ வினது நிகர்மாற்றனது θ வின் கோசீக்கன் எனக் கூறப்பட்டு கோசீ θ வென எழுதப்படும் ; தான் θ வினது நிகர்மாற்றனது θ வின் கோதான்சன் எனக் கூறப்பட்டு கோதா θ வென எழுதப்படும்.

$$\text{தான் } \theta=\frac{\text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta},\quad \text{சீக } \theta=\frac{1}{\text{கோசை } \theta},\quad \text{கோசீ } \theta=\frac{1}{\text{சைன் } \theta},$$

$$\text{கோதா } \theta=\frac{\text{கோசை } \theta}{\text{சைன் } \theta}=\frac{1}{\text{தான் } \theta}.$$

θ என்பது நேராயும் $\dfrac{\pi}{2}$ இலுஞ் சிறிதாயும் இருந்தால், OB என்பது OA யோடு OC ஆக்குங் கோணத்தினுட் கிடக்கும்.

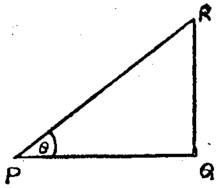


OA மீது OB யின் எறியம் OA யோடு ஒரு போக்காகும். OC யின் மீதுள்ள OB யின் எறியம் OC யோடு ஒரு போக்காகும்.

∴ கோசை θ, சைன் θ என்னும் இரண்டும் நேராகும்.

$$\therefore \text{ கோசை } \theta=\frac{ON}{OB},\quad \text{சைன் } \theta=\frac{OM}{OB}=\frac{NB}{OB}.$$

ஒரு கோணம் θ விற்குச் சமனுயுள்ள ஒரு செங்கோண முக்கோணி வரையப்பட்டால், சைன் θ வானது θ என்னுங் கோணத்தின் எதிர்ப் பக்கத்திற்குஞ் செம்பக்கத்திற்குமுள்ள விகிதமாகும் ; கோசை θ வானது θ என்னுங் கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கத்திற்குஞ் செம்பக்கத்திற்குமுள்ள விகிதம்.



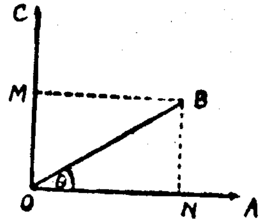
$$\text{சைன் } \theta=\frac{QR}{PR},\qquad \text{கோசை } \theta=\frac{PQ}{PR},$$

$$\text{தான் } \theta=\frac{QR}{PQ},\qquad \text{சீக } \theta=\frac{PR}{PQ},$$

$$\text{கோசீ } \theta=\frac{PR}{QR},\qquad \text{கோதா } \theta=\frac{PQ}{QR}.$$

திரிகோணகணித விகிதங்களுடைய மாறல்கள்.

OC என்பது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக ; OB என்பது



OA யோடு θ வென்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. $\theta = 0$ ஆகும்பொழுது, OB என்பது OA யின் வழியே கிடக்கும்; ஆகவே, OA யின்மீதுள்ள OB யின் எறியம் நேராயும் OB யிற்குச் சமனுயும் இருக்கும் ; அப்பொழுது, OC மீது OB யின் எறியம் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \text{ கோசை } 0 = 1, \text{ சைன் } 0 = 0.$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, OA, OC என்பன மீது OB யினுடைய எறியங்கள் இரண்டும் நேராகும் ; அதுபற்றி, கோசை θ, சைன் θ என்னும் இரண்டும் நேராகும். OB என்பது OA யிலிருந்து OC யிற்குச் சுழல, OA மீது OB யின் எறியம் குறையும் ; அப்பொழுது, OC மீது OB யின் எறியம் கூடும்.

$\therefore \theta$ என்பது 0 இலிருந்து $\frac{\pi}{2}$ இற்குக் கூட, கோசைθ என்பது குறையும் ; அப்பொழுது சைன் θ என்பது கூடும்.

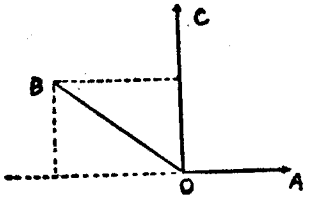
$\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, OB என்பது OC யின் வழியே கிடக்கும் ; ஆகவே, OA மீது OB யின் எறியம் பூச்சியமாகும் ; அப்பொழுது OC மீது OB யின் எறியம் நேராயும் OB யிற்குச் சமனுயும் இருக்கும்.

$$\therefore \text{ கோசை } \frac{\pi}{2} = 0, \text{ சைன் } \frac{\pi}{2} = 1.$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ஆகும்பொழுது, OA மீது OB யின் எறியம் மறையாகும் ; அப்பொழுது OC மீது OB யின் எறியம் நேராகும்.

$\therefore$ கோசை θ மறையாயும் சைன் θ நேராயும் இருக்கும்.

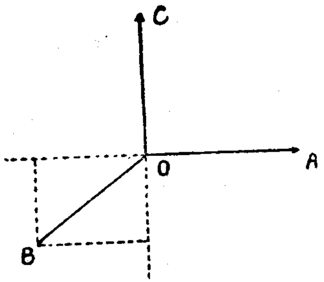
$\theta = \pi$ ஆகும்பொழுது, OB என்பது நீட்டப்பட்ட AO வின் வழியே கிடக்கும் ; ஆகவே, OA மீது OB யின் எறியம் மறையாகும் ;



அதனுடைய தனிப் பெறுமானம் OB யிற்குச் சமனுகும் ; OC மீது அதன் எறியம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, கோசை $\pi = -1$, சைன் $\pi = 0$.

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, OA, OC என்பன மீது OB யினுடைய எறியங்கள் இரண்டும் மறையாகும் ; ஆகவே, கோசை θ, சைன் θ என்னும் இரண்டும் மறையாகும்.

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ ஆகும்பொழுது OB என்பது நீட்டிய CO வின் வழியே கிடக்கும் ; ஆகவே, OA யின்மீதுள்ள OB யின் எறியம் பூச்சியமாகும் ; அப்பொழுது OC யின்மீதுள்ள அதன் எறியம் மறையாகும் ; அதனுடைய தனிப்பெறுமானம் OB யிற்குச் சமனுகும்.



$$\therefore \text{ கோசை } \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \text{சைன் } \frac{3\pi}{2} = -1.$$

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ஆகும்பொழுது OA மீது OB யின் எறியம் நேராயும், OC மீது அதன் எறியம் மறையாயும் இருக்கும் ; ஆகவே, கோசை θ நேராயும் சைன் θ மறையாயும் இருக்கும்.

$\theta = 2\pi$ ஆகும்பொழுது கோசை θ, சைன் θ என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்கள் $\theta = 0$ ஆகும்பொழுதுள்ள பெறுமானங்களாகும்.

$$\therefore \text{ கோசை } 2\pi = 1, \text{ சைன் } 2\pi = 0.$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ ஆயின், $\theta = 0$ அல்லது π ஆகும்பொழுதே சைன் θ பூச்சியமாயும், $\theta = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுதே கோசை θ பூச்சியமாயும் இருக்கும்.

தான் $\theta = \frac{\text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta}$ ஆகையால், $\theta = 0$, π அல்லது 2π ஆகும்பொழுது தான் $\theta = 0$. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ என்பதில், சைன் θ, கோசை θ என்னும் இரண்டும் நேராயிருப்பதாலும், இவ்வீச்சுக்குள்ளே சைன் θ உறுதியாகக் கூடுதலாலும் கோசை θ உறுதியாகக் குறைதலாலும், θ என்பது 0, $\frac{\pi}{2}$

என்பனவற்றிற்கிடையே கூட, தான் θ என்பது உறுதியாகக் கூடும். $\theta=\frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, கோசை $\theta=o$. ஆகவே தான் θ விற்குப் பொருள் இல்லே.

$o<\theta<\frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, தான் θ நேராகும் ;

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ஆகும்பொழுது, தான் θ மறையாகும் ;

$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, தான் θ நேராகும்.

$\theta=\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, தான் θ விற்குப் பொருளில்லே.

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ஆகும்பொழுது, தான் θ மறையாகும்.

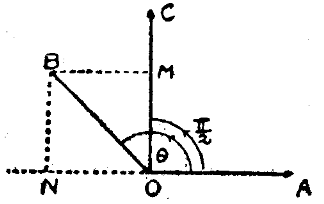
$\theta=o$, π அல்லது 2π ஆகும்பொழுது கோசீ θ, கோதா θ என்பனவற்றிற்குப் பொருளில்லே.

θ வினுடைய பிற பெறுமானங்களுக்கு கோசீ θ, கோதா θ, சீக θ என்பனவற்றினுடைய குறிகளே, சைன் θ, கோசை θ என்பனவற்றினுடைய குறிகளை ஆராய்வதாற் பெறலாம்.

சைன் θ, கோசை θ என்பன அடிப்படையான விகிதங்கள். அவை தெரியப்பட்டு பூச்சியமல்லாதவையாய் இருந்தால், மற்றை விகிதங்களுடைய பெறுமானங்கள் அறியப்படும்.

சைன் θ விற்கும் கோசை θ விற்கும் உள்ள தொடர்பு.

OB என்பது OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக ; OC என்பது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. ON, OM என்பன



OA, OC என்பன மீது OB யினுடைய நிமிர்கோணவெறியங்களாயின், பைதகரசினது தேற்றத்தினுல் $ON^2+OM^2=OB^2$ என்பது பெறப்படும்.

$$\therefore \left(\frac{ON}{OB}\right)^2+\left(\frac{OM}{OB}\right)^2=1$$

$\therefore$ θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும் கோசை$^2\,\theta+$சைன்$^2\,\theta=1$.

கோசை θ வானது பூச்சியமன்றெனின், கோசை$^2\,\theta$ வால் வகுக்க,

$1+$ தான்$^2\,\theta=$ சீக$^2\,\theta$.

சைன் θ வானது பூச்சியமன்றெனின், சைன்$^2\,\theta$ வால் வகுக்க,

கோதா$^2\,\theta+1=$ கோசீ$^2\,\theta$.

கோசை$^2\theta+$சைன்$^2\theta=1$ ஆகையால், கோசை$^2\,\theta$ வோ சைன்$^2\,\theta$ வோ பெறக்கூடிய மிகப்பெரிய பெறுமானம் 1 ஆகும்.

$\therefore$ θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும், கோசை θ, அல்லது சைன் θ என்பது -1 இற்கும் 1 இற்கும், இடையிலே கிடக்க வேண்டும்.

அதாவது θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$-1\leqq$ கோசை $\theta\leqq 1$, $-1\leqq$ சைன் $\theta\leqq 1$.

$\sqrt{1-\text{கோசை}^2\,\theta}$ என்பது $1-$கோசை$^2\,\theta$ வினது நேர்வர்க்க மூலத்தைக் குறிக்கின்றமையால், சைன் $\theta=\sqrt{(1-\text{கோசை}^2\,\theta)}$ என்பது உண்மையாகாது ; ஏனெனில், சைன்θ என்பது நேராய் அல்லது மறையாய் இருக்கலாம்.

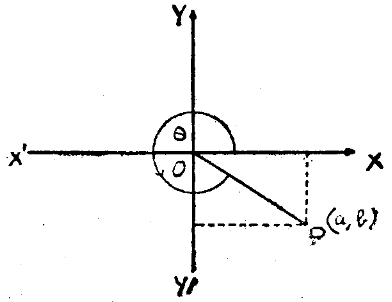
கோசை θ தரப்பட்டால், சைன் θ விற்கு $\pm\sqrt{(1-\text{கோசை}^2\,\theta)}$ என்னும் இரு பெறுமானங்களுள் ஒன்று இருக்கலாம்.

$\therefore$ சைன் $\theta=\pm\sqrt{(1-\text{கோசை}^2\,\theta)}$.

அதுபோல, கோசை $\theta=\pm\sqrt{(1-\text{சைன்}^2\,\theta)}$.

a, b என்பன $a^2+b^2=1$ ஆகும்படியுள்ள இரண்டு எண்களாயின், $o\leqq\theta<2\pi$ என்னும் வீச்சில், கோசை $\theta=a$ யாயும், சைன் $\theta=b$ யாயும் இருக்கும்படி θ விற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு.

OY யானது OX ஒடு $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமாறு $X'OX$, $Y'OY$ என்னும் இரு செங்கோண அச்சுக்களை எடுக்க. OX, OY என்பன குறித்து (a, b) என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய P என்னுந் தனிப்புள்ளியைக் குறிக்க. ஆயின், OX, OY என்பன மீது OP யினுடைய நிமிர்கோணவெறியங்கள் a, b என்பனவாகும் ; $OP^2=a^2+b^2=1$.



θ என்பது OP யால் OX ஒடு இடஞ்சுழிப்போக்கில் ஆக்கப்பட்ட கோணமாயின்,

கோசை $\theta=a$ யாயும், சைன் $\theta=b$ யாயும் இருக்கும்.

முந்திய பக்கத்துப் படமானது, a நேராயும் b மறையாயுமுள்ள வகைக்குப் பொருந்தும். a, b என்பன தரப்பட்டபொழுது $o \leqq \theta < 2\pi$ ஆகும்படி θ விற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு என்பது தெளிவு.

a, b என்பன இரண்டும் நேராயின் θ என்பது $o, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கும் ; a மறையாயும் b நேராயுமிருந்தால் θ என்பது $\frac{\pi}{2}$, π என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கும் ; a, b என்பன இரண்டும் மறையாயிருந்தால், θ என்பது $\pi, \frac{3\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கும் ; a நேராயும் b மறையாயுமிருந்தால், θ என்பது $\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கும்.

$b=0$ ஆயின், a என்பது நேராய் அல்லது மறையாய் இருப்பதற்கேற்ப, $\theta=0$ அல்லது π ஆகும் ; $a=0$ ஆயின், b என்பது நேராய் அல்லது மறையாய் இருப்பதற்கேற்ப $\theta=\frac{\pi}{2}$ அல்லது $\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்.

பயிற்சி 1

1. சைன் $\theta = -\frac{3}{5}$ ஆயின், கோசை θ, தான் θ என்பன அடையத்தக்க பெறுமானங்களைக் கண்டு. அவற்றுள் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கூட்டங்களாக அமைக்க.

2. தான் $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆயின், சைன் θ, கோசை θ என்பன அடையத்தக்க பெறுமானங்களைக் கண்டு, அவற்றுள் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கூட்டங்களாக அமைக்க.

3. 2 சைன்$^2\theta$ − 5 கோசை $\theta - 4 = 0$ ஆயின், சைன் θ, கோசை θ என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. θ வினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்
கோசை$^3\theta$ − சைன்$^3\theta$ = (கோசை θ − சைன் θ) (1 + கோசை θ சைன் θ) எனக் காட்டுக.

5. கோசை$^4\theta$ − சைன் $^2\theta + 1 = 0$ ஆயின், சைன் θ அடையத்தக்க பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. θ வினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்,
கோசை$^4\theta$ − சைன்$^4\theta = 1 - 2$ சைன்$^2\theta$ = 2 கோசை$^2\theta - 1$ எனக் காட்டுக.

7 கோசை$^4\theta$ + சைன்$^4\theta = 1 - 2$ சைன்$^2\theta$ கோசை$^2\theta$ எனக் காட்டுக.

8. கோசை$^6\theta$ + சைன்$^6\theta = 1 - 3$ சைன்$^2\theta$ கோசை$^2\theta$ எனக் காட்டுக.

9. சீக θ + தான் $\theta = 2$ ஆயின், சைன் θ, கோசை θ என்பனவற்றைக் காண்க.

10. கோசீ θ − கோதா $\theta = \frac{1}{5}$ ஆயின், கோசை θ வைக் காண்க.

11. சீக$^6\theta$ − தான்$^6\theta = 1 + 3$ தான்$^2\theta + 3$ தான்$^4\theta$ எனக் காட்டுக.

12. சீக$^2\theta + 3$ தான் $\theta + 1 = 0$ ஆயின், சைன் θ பெறத்தக்க பெறுமானங்களைக் காண்க.

13. கோதா$^2\theta - 2$ கோசீ $\theta - 2 = \theta$ ஆயின், கோசை θ பெறத்தக்க பெறுமானங்களைக் காண்க.

14. $a = 2$ கோசை $\theta + 3$ சைன் θ வாயும், $b = 3$ கோசை $\theta + 2$ சைன் θ வாயுமிருந்தால், a யிற்கும் b யிற்கும் θ வைச் சாராது நிற்குந் தொடர்பைக் காண்க.

15. $a = 2$ தான் θ + சீக θ, b = தான் $\theta + 2$ சீக θ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கிடையே θ வை நீக்குக.

16. a = தான் θ + கோதா θ, b = சீக$^2\theta$ + கோசீ$^2\theta$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கிடையே θ வை நீக்குக.

17. $a = 1$ + சைன் θ + கோசை θ, $b = 2$ − சைன் θ கோசை θ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கிடையே θ வை நீக்குக.

18. a = கோசை θ − சைன் θ, $b = 1$ − சைன் θ கோசை θ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கிடையே θ வை நீக்குக.

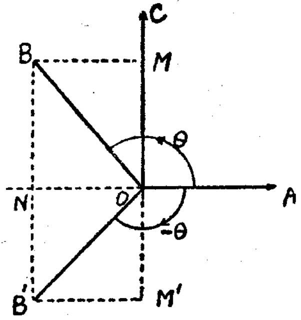
19. θ வானது $0, \frac{\pi}{2}$ என்னும் இரண்டும் உட்பட அவற்றிற்கு இடையே கிடக்கும்பொழுது $\frac{\text{சைன் } \theta}{1 + \text{கோசை } \theta}$ என்பதன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையுங் காண்க.

20. θ வானது $0, \frac{\pi}{4}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கும்பொழுது $\frac{\text{கோசை } \theta - \text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta + \text{சைன் } \theta}$ என்பதன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தையும் காண்க. (தான் $\frac{\pi}{4} = 1$ எனக் கொள்க.)

அத்தியாயம் 3

$-\theta$, θ என்பவற்றினுடைய விகிதங்கள்

OB என்பது OA யோடு யாதுமொரு பருமனையுங் குறியையுங் கொண்ட θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக; OB' என்பது OA யோடு $-\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக; ஆயின், OB, OB' என்பன OA யிற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் OA யோடு ஒரே பருமனைக் கொண்ட கோணங்களை ஆக்கிக் கொண்டு கிடக்கின்றன. $OB = OB'$ ஆகக் கொள்க. மேலுள்ள படத்தில், θ என்பது நேர் எனக் கொள்ளப்பட்டது. θ என்பது மறையாயின் B, B' என்பன ஒன்றோடொன்று மாற்றப்பட வேண்டும். OB, OB' என்பவற்றினுடைய தொடர்பு நிலைகள் எவையாயிருந்தாலும் பின்வரும் நியாயங்கள் உண்மையாகும்.



OA மீது OB யின் நிமிர்கோணவெறியம் OA மீது OB' இன் நிமிர்கோணவெறியத்துக்குச் சமன்.

$$\text{கோசை}\,\theta = \frac{OA \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB};$$

$$\text{கோசை}\,(-\theta) = \frac{OA \text{ மீது } OB' \text{ யின் எறியம்}}{OB'};$$

$\therefore$ θ வினுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
கோசை $(-\theta) =$ கோசை θ.

OC யானது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினால்,

OC மீது OB, OB' என்பவற்றினுடைய எறியங்கள் எதிர்க்குறிகளையும் ஒரே பருமனையுங் கொள்ளும்.

$$\text{சைன்}\,(-\theta) = \frac{OC \text{ மீது } OB' \text{ இன் எறியம்}}{OB'};$$

$$\text{சைன்}\,\theta = \frac{OC \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB};$$

$\therefore$ θ வினுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
சைன் $(-\theta) = -$சைன் θ.

$$\therefore\ \text{தான்}\,(-\theta) = \frac{\text{சைன்}\,(-\theta)}{\text{கோசை}\,(-\theta)} = \frac{-\text{சைன்}\,\theta}{\text{கோசை}\,\theta} = -\text{தான்}\,\theta.$$

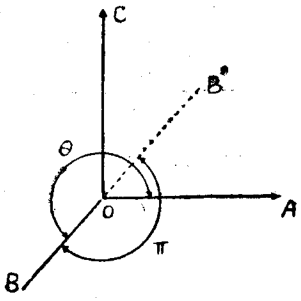
$$\therefore\ \text{சீக}\,(-\theta) = \frac{1}{\text{கோசை}\,(-\theta)} = \frac{1}{\text{கோசை}\,\theta} = \text{சீக}\,\theta.$$

$$\therefore\ \text{கோசீ}\,(-\theta) = \frac{1}{\text{சைன்}\,(-\theta)} = -\frac{1}{\text{சைன்}\,\theta} = -\text{கோசீ}\,\theta.$$

$$\therefore\ \text{கோதா}\,(-\theta) = \frac{1}{\text{தான்}\,(-\theta)} = -\frac{1}{\text{தான்}\,\theta} = -\text{கோதா}\,\theta.$$

$\pi+\theta$, θ என்பவற்றினுடைய விகிதங்கள்.

OB என்பது OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. OB என்பது π என்னுங் கோணத்திற்கூடாக நேர்ப் போக்கிற் சுழன்றால், அது OA யோடு $\pi+\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்ற OB' என்னும் நிலையை அடையும். ஆயின், OA மீது OB, OB' என்பனவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரே பருமனையும் எதிர்க் குறிகளையும் கொள்ளும்.



$\therefore$ θ வின் எல்லாப்பெறுமானங்களுக்கும்,
கோசை $(\pi+\theta) = -$கோசை θ.

OC என்பது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குங் கோடாயின், OC மீது OB, OB' என்பனவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரே பருமனையும் எதிர்க்குறிகளையுங் கொள்ளும்.

$\therefore$ θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், சைன் $(\pi+\theta) = -$சைன் θ.

$$\therefore\ \text{தான்}\,(\pi+\theta) = \frac{\text{சைன்}\,(\pi+\theta)}{\text{கோசை}\,(\pi+\theta)} = \frac{-\text{சைன்}\,\theta}{-\text{கோசை}\,\theta} = \text{தான்}\,\theta.$$

$$\therefore\ \text{சீக}\,(\pi+\theta) = \frac{1}{\text{கோசை}\,(\pi+\theta)} = -\text{சீக}\,\theta.$$

$$\therefore\ \text{கோசீ}\,(\pi+\theta) = \frac{1}{\text{சைன்}\,(\pi+\theta)} = -\text{கோசீ}\,\theta.$$

$\pi-\theta$, θ என்பனவற்றினுடைய விகிதங்கள்.

θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், கோசை $(\pi+\theta) = -$கோசை θ.

θ என்பதை $-\theta$ வாற் பிரதியிட,

θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் கோசை $(\pi-\theta) = -$கோசை $(-\theta)$
$= -$கோசை θ.

சைன் $(\pi+\theta) = -$ சைன் θ ஆகையால்,

θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

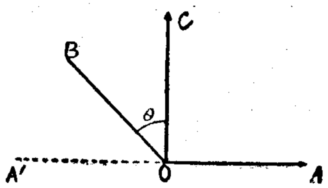
$$\text{சைன் } (\pi-\theta) = -\text{சைன் } (-\theta) = \text{சைன் } \theta.$$

$$\therefore \text{ தான் } (\pi-\theta) = -\text{தான் } \theta.$$

$$\therefore \text{ சீக } (\pi-\theta) = -\text{சீக } \theta.$$

$$\therefore \text{ கோசீ } (\pi-\theta) = \text{கோசீ } \theta.$$

$\frac{\pi}{2}+\theta$, θ என்பனவற்றினுடைய விகிதங்கள்.



OC என்பது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக ; OB என்பது OC யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. ஆயின் OB என்பது OA யோடு $\frac{\pi}{2}+\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்.

OB யானது OC யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்றமையால்,

$$\text{கோசை } \theta = \frac{OC \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}.$$

AO என்பது A' இற்கு நீட்டப்பட்டால், OA' என்பது OC யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்.

$$\therefore \text{ சைன் } \theta = \frac{OA' \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB},$$

$$= -\frac{OA \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}.$$

OB என்பது OA யோடு $\frac{\pi}{2}+\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்றமையால்,

$$\text{கோசை}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{OA \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}.$$

$$\text{சைன் }\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{OC \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}.$$

$\therefore$ θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் சைன் $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$ கோசை θ,

$$\text{கோசை } \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\text{சைன் } \theta.$$

$$\therefore \text{ தான் } \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\text{சைன் } \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\text{கோசை}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \frac{\text{கோசை } \theta}{-\text{சைன் } \theta} = -\text{கோதா } \theta.$$

$$\therefore \text{ கோதா}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\text{தான் } \theta.$$

$$\therefore \text{ சீக } \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\text{கோசீ } \theta.$$

$$\therefore \text{ கோசீ } \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \text{ சீக } \theta.$$

$\frac{\pi}{2}-\theta$, θ என்பனவற்றினுடைய விகிதங்கள்.

மேலுள்ள முடிபுகளில் θ என்பதை $-\theta$ வால் பிரதியிட,

$$\text{சைன் } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{கோசை } (-\theta) = \text{கோசை } \theta,$$

$$\text{கோசை } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\text{சைன் } (-\theta) = \text{சைன் } \theta,$$

$$\text{தான் } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\text{கோதா } (-\theta) = \text{கோதா } \theta,$$

$$\text{கோதா } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{தான் } \theta,$$

$$\text{சீக } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{கோசீ } \theta,$$

$$\text{கோசீ } \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{சீக } \theta.$$

$\frac{3\pi}{2}+\theta$, θ என்பனவற்றினுடைய விகிதங்கள்.

$$\text{சைன் } \left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \text{சைன்}\left(\pi+\overline{\frac{\pi}{2}+\theta}\right) = -\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\text{ கோசை } \theta,$$

$$\text{கோசை } \left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \text{கோசை}\left(\pi+\overline{\frac{\pi}{2}+\theta}\right) = -\text{கோசை}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \text{சைன் } \theta,$$

$$\text{தான் } \left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\text{சைன் } \left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{\text{கோசை}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)} = -\text{கோதா } \theta,$$

$$\text{கோதா}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\text{தான்}\ \theta,$$

$$\text{சீக}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \text{கோசீ}\ \theta,$$

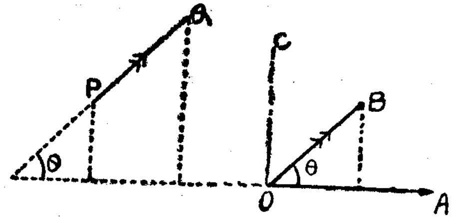
$$\text{கோசீ}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\text{சீக}\ \theta.$$

இரு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம் பற்றி அவற்றுள் ஒரு கோட்டின் மீது மற்றைக் கோட்டின் எறியம்.

OB என்னும் ஒரு கோடு OA என்னும் ஒரு கோட்டோடு (யாதுமொரு பருமனையுங் குறியையுங் கொண்ட) θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல்

$$\text{கோசை}\ \theta = \frac{OA \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}$$

$\therefore$ OA மீது OB யின் எறியம் $= OB$ கோசை θ.



PQ என்பது $\vec{PQ}$ வின் போக்கு $\vec{OB}$ யின் போக்கோடு ஒன்றுகும் படி OB யிற்குச் சமாந்தரமாயும் நீளத்தாற் சமனுமுள்ள வேறொரு கோடாயின், OA மீது PQ, OB என்பனவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரு பருமனையுங் குறியையுங் கொள்ளும்; OA யோடு PQ வால் ஆக்கப்படும் கோணமும் θ வாகும்.

$\therefore$ PQ என்னும் யாதுமொரு கோடு OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல், OA மீது PQ வின் எறியம் PQ கோசை θ வாகும்.

OC என்பது OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னும் கோணத்தை ஆக்குங் கோடாயின்

$$\text{சைன்}\ \theta = \frac{OC \text{ மீது } OB \text{ யின் எறியம்}}{OB}.$$

$\therefore$ OC மீது OB யின் எறியம் $= OB$ சைன் θ.

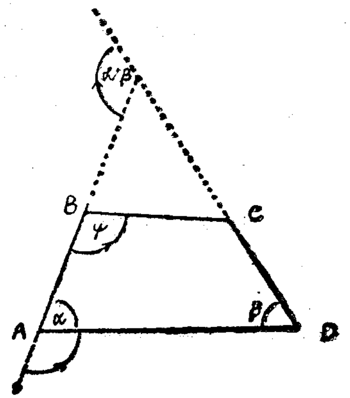
OC மீது PQ, OB என்பனவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரே பருமனையுங் குறியையுங் கொள்ளும்.

$\therefore$ PQ என்னும் யாதுமொரு கோடு OA யோடு θ வென்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல், OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் கோட்டின் மீதுள்ள PQ வின் எறியம் PQ சைன் θ வாகும்.

உ-ம். $ABCD$ என்பது $AB=CD=a$ ஆயும், $AD=2a$ ஆயும் $\angle BAD$, $\angle ADC$ என்பன கூர்ங்கோணங்களாய் முறையே α, β என்னும் பருமன்களையுடையனவாயுமுள்ள ஒரு நாற்பக்கல். $\angle ABC$ யின் பருமன் ϕ ஆயின்,

$$\text{தான்}\ \phi = \frac{2\ \text{சைன்}\ \alpha - \text{சைன்}\ (\alpha+\beta)}{1-2\ \text{கோசை}\ \alpha + \text{கோசை}\ (\alpha+\beta)}$$ எனக் காட்டுக.

BA யிலிருந்து BC யிற்கு அளக்கப்படுங் கோணம் இடஞ்சுழிப்போக்காயும் அதுபற்றி நேராயுமிருத்தலால் BC என்பது BA யோடு ஆக்குங் கோணம் ϕ ஆகும். AD என்பது BA யோடு ஆக்குங் கோணம் $\pi-\alpha$ ஆகும். DC என்பது நீட்டிய AB என்பதைச் சந்திக்கும்படி நீட்டப்பட்டால், BA யிலிருந்து DC யிற்கு அளக்கப்படுங் கோணம் வலஞ்சுழிப் போக்கையும் $\alpha+\beta$ என்னும் பருமனையுங் கொண்டிருக்குமெனக் காணப்படும்; அதற்குக் காரணம் ஒரு முக்கோணியின் புறக்கோணம் ஒழிந்த இரண்டு அகக் கோணத்தின் மொத்தம் என்பதே. எனின் BA யோடு DC யால் ஆக்கப்படும் கோணம் $-(\alpha+\beta)$ ஆகும். யாதுமொரு கோட்டின் மீதுள்ள BC யின் எறியம் அக் கோட்டின் மீதுள்ள BA, AD, DC என்பனவற்றினுடைய எறியங்களின் மொத்தத்திற்குச் சமன்.



BA மீது எறியங்களை எடுக்க,

$$BC\ \text{கோசை}\ \phi = BA + AD\ \text{கோசை}\ (\pi-\alpha) + DC\ \text{கோசை}\ (-\alpha-\beta)$$

$$= a - 2a\ \text{கோசை}\ \alpha + a\ \text{கோசை}\ (\alpha+\beta).$$

BA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் கோட்டின் மீது எறியங்களை எடுக்க,

$$BC\ \text{சைன்}\ \phi = 0 + AD\ \text{சைன்}\ (\pi-\alpha) + a\ \text{சைன்}\ (-\alpha-\beta)$$

$$= 2a\ \text{சைன்}\ \alpha - a\ \text{சைன்}\ (\alpha+\beta).$$

ϕ என்பது 0, π என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கவேண்டும்.

$1-2$ கோசை $\alpha +$ கோசை $(\alpha+\beta)=0$ ஆயின், கோசை $\phi=0$;

ஆகவே, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

$1-2$ கோசை $\alpha +$ கோசை $(\alpha+\beta)$ என்பது பூச்சியமன்றெனின்,

$$\text{தான்}\ \phi = \frac{2\ \text{சைன்}\ \alpha - \text{சைன்}\ (\alpha+\beta)}{1-2\ \text{கோசை}\ \alpha + \text{கோசை}\ (\alpha+\beta)}.$$

இக்கோவை நேராய் அல்லது மறையாய் இருப்பதற்கேற்ப, ϕ என்பது கூர்ங்கோணமாய் அல்லது விரிகோணமாய் இருக்கும்.

பயிற்சி 2.

1 x, y என்பன $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்க,

சைன் $x >$ கோசை y ஆயின், $x+y>\frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

2. x, y என்பன $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்க,

கோசை$^2 x+$கோசை$^2 y<1$ ஆயின், $x+y>\frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

3. x, y என்பன $0, \pi$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்க,

கோசை $x+$கோசை $y > 0$ ஆயின் $x+y<\pi$ என நிறுவுக.

4. x, y என்பன $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்க,

தான் $x >$ கோதா y ஆயின், $x+y > \frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

5. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ஆயும் $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ ஆயும் தான் $x+$ தான் $y > 0$ ஆயும் இருந்தால், $x+y > 3\pi$ என நிறுவுக.

6. θ என்பது யாதுமொரு கோணமாயின்,

$$\text{கோசை } \theta+\text{கோசை}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\text{கோசை}\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=0 \text{ என்றும்}$$

$$\text{சைன் } \theta+\text{சைன்}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\text{சைன்}\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

என்றுங் காட்டுக. (தக்க கோடுகளின் மீது சமபக்க முக்கோணி ஒன்றினுடைய பக்கங்களுடைய எறியங்களை ஆராய்க.)

ஒரே கோசைன் கோணங்கள்.

OB என்பது OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. OB யானது இந்நிலையிலிருந்து தொடங்கி $+2\pi$ அல்லது -2π என்னுங் கோணத்திற் கூடாகச் சுழன்றால், அது பின்னும் அதே நிலையை அடையும்.

$\therefore$ எல்லா θ விற்கும், கோசை$(2\pi+\theta) =$ கோசை $\theta =$ கோசை $(-2\pi+\theta)$;

$\therefore$ கோசை$(4\pi+\theta)=$ கோசை$(2\pi+\overline{2\pi+\theta})=$கோசை$(2\pi+\theta) =$ கோசைθ. கோசை$(-4\pi+\theta) =$ கோசை$(-2\pi+\theta-2\pi) =$ கோசை$(\theta-2\pi) =$ கோசைθ. பொதுவாக, n என்பது யாதுமொரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணாயின், எல்லா θ விற்கும் கோசை $(2n\pi + \theta) =$ கோசை θ என்பது பெறப்படும்.

OB, OB' என்பன O வினூடாகச் செல்லும் சமநீளக்கோடுகளாயின், அவை ஒன்றோடொன்று பொருந்தும் பொழுதாயினும் அல்லது OA யைக் குறித்துச் சமச்சீராயிருக்கும் பொழுதாயினும் OA யின்மீதுள்ள

OB, OB' என்பனவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரேயளவினவாகும் ; வேறொருவகையிலும் அவை அவ்வாறாகா. OB, OB' என்பன OA யோடு முறையே θ, $-\theta$ என்னுங் கோணங்களை ஆக்கினால், அவை OA யைக் குறித்துச் சமச்சீராகும்.

ஆகவே, OB, OB' என்பன OA யைக் குறித்துச் சமச்சீராயிருக்க OB என்பது OA யோடு θ வென்னுங் கோணத்தை ஆக்கினால், OB' என்பது OA யோடு $2n\pi-\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் ; இங்கு n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்.

$\therefore$ n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணாயிருந்தால், θ வோடு ஒரு கோசைனுள்ள எக்கோணமும் $2n\pi+\theta$ அல்லது $2n\pi-\theta$ என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore$ n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணாயிருந்தால், θ வோடு ஒரு கோசைனுள்ள கோணங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரு பொதுக் கோவை $2n\pi\pm\theta$ என்பதாகும்.

ஒரே சைன் கோணங்கள்.

θ என்பது யாதுமொரு கோணமாயின், n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்ணாயிருக்கும்பொழுது கோசைனிற் போல

$$\text{சைன் } (2n\pi+\theta) = \text{சைன் } \theta.$$

OB, OB' என்பன O வினூடாகச் செல்லுஞ் சமநீளக் கோடுகளாயின், அவை ஒன்றோடொன்று பொருந்தும் பொழுதாயினும் அல்லது (OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்ற) OC யைக் குறித்து சமச்சீராயிருக்கும் பொழுதாயினும் OC என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள அவற்றினுடைய எறியங்கள் ஒரேயளவினவாகும் ; வேறொருவகையிலும் அவை அவ்வாறாகா. OB, OB' என்பன OA யோடு முறையே θ, $\pi-\theta$ என்னுங் கோணங்களை ஆக்கினால், அவை OC யைக் குறித்துச் சமச்சீராகும். ஆகவே OB, OB என்பன OC யைக் குறித்து சமச்சீராயிருக்க, அவற்றுள் OB' என்பது OA யோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினால், OB' என்பது OA யோடு $(2n+1)\pi-\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும். இங்கு n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்.

ஆகவே, n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணாயிருந்தால், θ வோடு ஒரு சைனுள்ள எக்கோணமும் $2n\pi+\theta$ அல்லது $(2n+1)\pi-\theta$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே, n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணாயிருந்தால், θ வோடு ஒரு சைனுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் $n\pi+(-1)^n\theta$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும் ; அதற்குக் காரணம் n ஒற்றையெண்ணாயின் $(-1)^n$ என்பது -1 ஆயும் அன்றி இரட்டையெண்ணாயின் அது $+1$ ஆயும் இருக்கும் என்பதே.

ஒரே தான்சன் கோணங்கள்.

எல்லா θ விற்கும் தான் $(\pi+\theta)=$ தான் θ என்று இதற்குமுன்னே நிறுவப்பட்டது.

$$\therefore \text{ தான் } (2\pi+\theta)=\text{ தான் } (\pi+\overline{\pi+\theta})=\text{ தான் } (\pi+\theta)=\text{ தான் } \theta,$$

$$\text{தான் } (3\pi+\theta)=\text{ தான் } (\pi+\overline{2\pi+\theta})=\text{ தான் } (2\pi+\theta)=\text{ தான்}\theta.$$

பொதுவாக, n என்பது ஒருநேர் முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது,

$$\text{தான் } (n\pi+\theta)=\text{ தான் } \theta.$$

இனி, தான் $(-\pi+\theta)=$ தான் $(\pi+\overline{\theta-\pi})=$ தான் θ.

பொதுவாக, n என்பது ஒரு மறை முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது

$$\text{தான் } (n\pi+\theta)=\text{ தான் } \theta.$$

$\therefore$ n என்பது யாதுமொரு நேர் முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது, எல்லா θ விற்கும்,

$$\text{தான் } (n\pi+\theta)=\text{ தான் } \theta.$$

அதாவது n என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது $(n\pi+\theta)$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள எக்கோணமும் θ வோடு ஒரு தான்சன் உடையது.

வேறொரு கோணமும் θ வோடு ஒரு தான்சன் உடையதாகாதென்பதை எளிதிற் காணலாம்.

θ என்பது தந்த ஒரு கோணமாயின், (நேர் அல்லது மறை அல்லது பூச்சியமாயுள்ள) ஒரு தனி முழுவெண் p என்பதை $p\pi+\theta$ வானது $0, \pi$ என்பனவற்றிற்கிடையே π அன்றி 0 உட்படக் கிடக்குமாறு (அதாவது $0 \leqq p\pi+\theta<\pi$ ஆகும்படி) காணலாம். $p\pi+\theta$ என்னுங் கோணம் θ வோடு ஒரே தான்சன் உடையது. ϕ என்பது 0, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடக்கும் ஒரு மாறுங் கோணமாயின், ϕ ஆனது இவ்வீச்சிற்குள்ளே கூட, தான் ϕ யானது நேர்க்குறியுள்ளதாய் உறுதியாகக் கூடும். ϕ யென்பது $\frac{\pi}{2}$, π என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடந்தால், ϕ யானது $\pi-\alpha$ என்னும் வடிவத்தைக் கொள்ளும்; இங்கு α வென்பது 0, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடக்கும்; தான் $\phi=$ தான் $(\pi-\alpha)=-$தான் α, ϕ யானது $\frac{\pi}{2}$, π என்பனவற்றிற்கிடையே கூடுதலுற, α வானது $\frac{\pi}{2}$, 0 என்பனவற்றிற்கு இடையே குறைதலுறும்; ஆயின், தான் α என்பது நேர்க்

குறியோடு உறுதியாகக் குறைதலுறும். ஆகவே, ϕ யானது $\frac{\pi}{2}$, π என்பனவற்றிற்கு இடையே கூடுதலுற, தான் ϕ யானது மறைக் குறியோடு உறுதியாகக் கூடுதலுறும். ஆகவே, 0, π என்பனவற்றிற்கு இடையே (π அன்றி, 0 உட்பட) ஒரே தான்சனுள்ள இரு கோணங்கள் இல்லை என்பது பெறப்படும்.

ஆகவே, n என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயிருக்க, θ என்பது தந்த ஒரு கோணமாயின், θ வோடு ஒரே தான்சனுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் $n\pi+\theta$ என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

ஆவர்த்தனம்.

ஒரு மாறுங் கணியம் பெறுமானம்பற்றி வேறொரு மாறுங்கணியம் x ஐச் சார்ந்தால், அது x இன் சார்பு எனப்பட்டு $f(x)$ என்பதனுற் குறிக்கப்படும். k என்பது (பூச்சியமல்லாத) மாருக்கணியமாயிருக்க அச்சார்பில் x என்னும் மாறி $k+x$ என்பதால் பிரதியிடப்படும் பொழுது அச்சார்பின் பெறுமானம் மாறவில்லை எனக் காணப்பட்டால், அச்சார்பு ஆவர்த்தனமுள்ளதெனப்படும்; அதாவது, k என்பது ஒரு நிலையான மாறிலியாயிருக்க, எல்லா x இற்கும் $f(x+k)=f(x)$ ஆயின், $f(x)$ என்பது ஆவர்த்தனமுள்ளது; எல்லா x இற்கும் $f(x+k)=f(x)$ ஆயின், $f(x+2k)=f(x+k+k)=f(x+k)=f(x)$; பொதுவாக, n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண் அல்லது மறை முழுவெண்ணுயிருக்கும் பொழுது, $f(x+nk)=f(x)$.

$f(x+k)=f(x)$ ஆகுமாறு உள்ள k யின் மிகச் சிறிய நேர்ப்பெறுமானம் $f(x)$ இன் காலம் எனப்படும்.

இவ்வரைவிலக்கணத்திலிருந்து சைன் x, கோசை x என்பன 2π ஐத் தம் காலமாகவுள்ள x இனுடைய ஆவர்த்தனச் சார்புகள் என்பதும் தான் x என்பது π ஐத் தன் காலமாகவுள்ள ஓர் ஆவர்த்தனச் சார்பு என்பதும் பெறப்படும்.

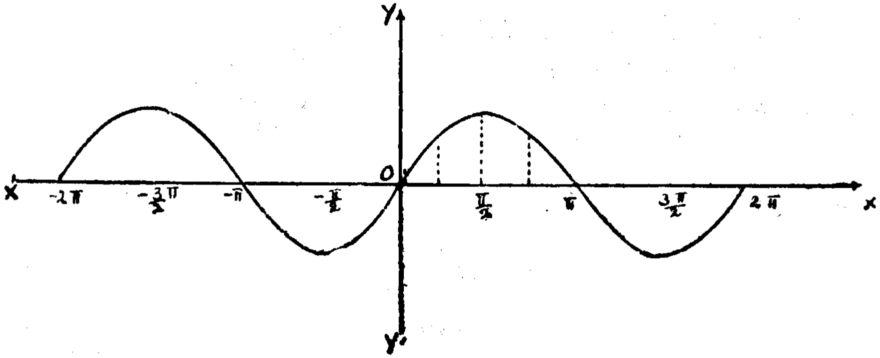
திரிகோணகணிதச் சார்புகளுடைய வரைபுகள்.

$y=$ சைன் x.

x என்பது ஆரையனில் அளக்கப்படுங் கோணமாயிருக்க, $y=$ சைன் x ஆகுக. $x=0$ ஆகும்பொழுது $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது $y=1$.

x என்பது 0 இலிருந்து $\frac{\pi}{2}$ இற்குச் கூடுதலுற, y என்பது 0 இலிருந்து 1 இற்கு உறுதியாகக் கூடுதலுறும்.

ஆகவே, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே x குறித்து y யின் வரைபு $(0, 0)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ என்னும் புள்ளிக்கு உறுதியாக ஏறும் ஒரு வளையியாகும்.



$y =$ சைன் x.

θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும்,

$$\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{கோசை}\,\theta = \text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),$$

ஆகவே, $y =$ சைன் x என்னும் வரைபில் $\frac{\pi}{2}-\theta,\ \frac{\pi}{2}+\theta$ என்பனவற்றைத் தம் இடைக்கூறுகளாகவுள்ள புள்ளிகளுக்கு, சம நிலைக்கூறுகள் உண்டு. ஆகவே, அவ்வரைபு $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாய்ச் செல்லுங் கோடு பற்றிச் சமச்சீராதல் வேண்டும்.

ஆகவே, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வரைபுப்பகுதியானது $x = o$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள முழுவரைபும் $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோடுபற்றிச் சமச்சீராகும்படி $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $(\pi,\ 0)$ என்னும் புள்ளிக்கு உறுதியாக இறங்கும்.

இனி, எல்லா θ விற்கும் சைன் $(\pi-\theta) =$ சைன் θ, சைன் $(\pi+\theta) = -$ சைன் θ. ஆகவே $y =$ சைன் x என்னும் வரைபில் $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ என்பனவற்றைத் தம் இடைக்கூறுகளாகவுள்ள புள்ளிகளுக்குப் பருமனிற் சமமுங் குறியில் எதிருமாயுள்ள நிலைக்கூறுகள் உண்டு. எனின், $x = \pi$, $x = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வரைபுப் பகுதி x அச்சிற்குக் கீழே $x = o$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பகுதியின் வடிவை உடையதாய்க் கிடக்கும். சைன் x என்பது ஆவர்த்தனமுடையதாயும் 2π யைத் தன் காலமாய்க் கொண்டதாயும் இருக்கின்றமையால், $x = o$, $x = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு

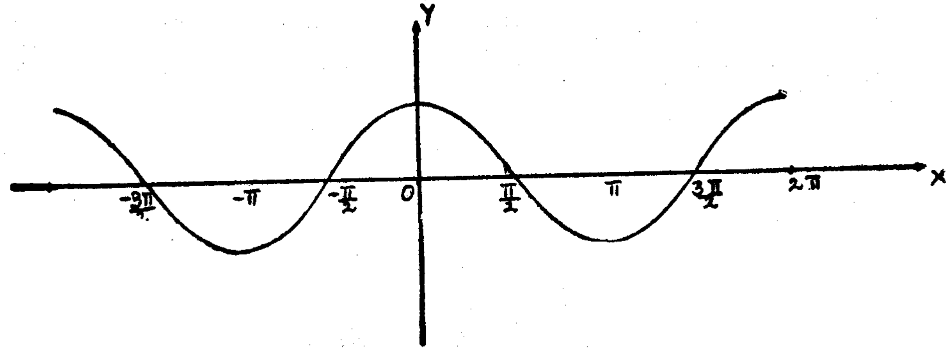
இடையே பெறும் வளையி $x = 2\pi$, $x = 4\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும், $x = 4\pi$, $x = 6\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் இவ்வாறே பிற பெறுமானங்களுக்கும், இன்னும் $x = -2\pi$, $x = 0$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும், $x = -4\pi$, $x = -2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் இவ்வாறே பிறபெறுமானங்களுக்குந் திரும்பத் திரும்ப வரும்.

x ஆனது 0 இலிருந்து $\frac{\pi}{2}$ இற்குக்கூட, சைன் x ஆனது உறுதியாகக் கூடியும், பின் x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இலிருந்து $\frac{3\pi}{2}$ இற்குக் கூட அது உறுதியாகக் குறைந்தும், அதன்பின் x ஆனது $\frac{3\pi}{2}$ இலிருந்து 2π இற்குக் கூட அது உறுதியாகக் கூடியும் நிற்கும்.

$y =$ கோசை x ஆகுக.

θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும், கோசை $\theta =$ சைன் $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$; ஆகவே, $y =$ சைன் x, $y =$ கோசை x என்னும் இரண்டு வரைபுகளையும் ஆராய்ந்தால், $x = \theta+\frac{\pi}{2}$ என்பதற்கு ஒத்த சைன் வரைபு நிலைக்கூறு $x = \theta$ என்பதற்கு ஒத்த கோசைன் வரைபு நிலைக்கூற்றிற்குச் சமன்.

ஆகவே, சைன் வரைபு ஆனது முழுவதுமாக x அச்சின் மறைத் திசையில் $\frac{\pi}{2}$ என்னுந் தூரத்தினூடாக இடம் பெயர்க்கப்பட்டால், அது கோசைன் வரைபோடு பொருந்தும்.



$y =$ கோசை x.

x ஆனது 0 இலிருந்து π இற்குக் கூட கோசை x ஆனது உறுதியாகக் குறைந்தும், பின் x ஆனது π இலிருந்து 2π இற்குக் கூட அது உறுதியாகக் கூடியும், நிற்கும்.

$y =$ தான் x ஆகுக.

$$\text{தான் } x = \frac{\text{சைன் } x}{\text{கோசை } x}.$$

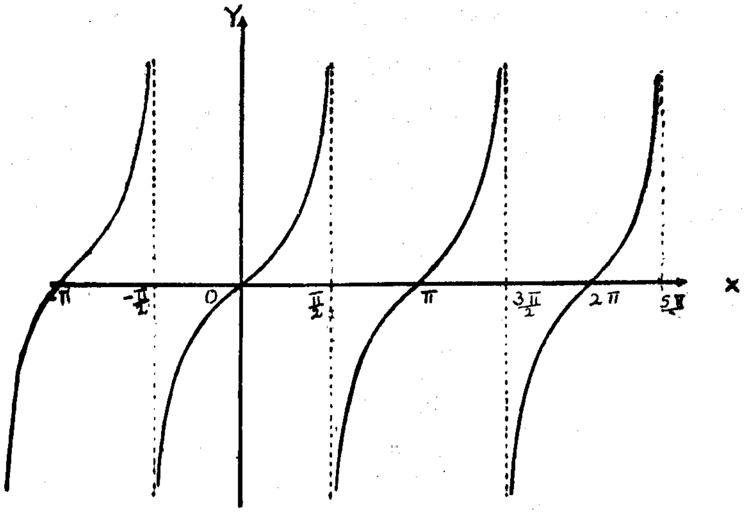
சைன் $x = 0$ ஆகும்பொழுது, தான் $x = 0$.

$\therefore$ $x = o$, $x = 2\pi$ என்டனவற்றிற்கு இடையே $x = 0$, π அல்லது 2π ஆகும் பொழுது, தான் $x = 0$.

கோசை $x = 0$ ஆகும்பொழுது தான் x இருப்பதில்லை. ஆகவே, $(0, 2\pi)$ என்பதில் $x = \dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $\dfrac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது தான் x என்பது வரையறுக்கப்படுகின்றதில்லை.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ என்பதில், தான் x என்பது நேர்க்குறியுள்ளதாயும் x கூடுதலுறத் தானும் உறுதியாகக் கூடுதலுறும் ஒன்றாயும் இருக்கும்; x என்பது $\dfrac{\pi}{2}$ என்னும் பெறுமானத்தை அணுக, சைன் x ஆனது 1 என்னும் பெறுமானத்தை அணுகும்; அப்போது, கோசை x ஆனது மிகச் சிறிதாயும் நேர்க்குறியுள்ளதாயும் இருக்கும்; ஆகவே, தான் x ஆனது மிகப் பெரிதாகும். ஆகவே, $x = o$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $y =$ தான் x என்னும் வரையின் பகுதி உற்பத்தியிலிருந்து தொடங்கி $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்னுங் கோட்டை வெட்டாது அதனை உறுதியாக அணுகிக்கொண்டு ஏறும் ஒருவளையியாகும். அவ்வளை முடிவுள்ளதன்று; y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயும் $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்னுங் கோட்டிற்கு மிக அணித்தாயுமுள்ள ஒரு கோடு அவ்வளையியை x அச்சிற்கு மிகப் பெரிய தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் வெட்டும்.

அவ்வளையியின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி அவ்வளையியினது நீளத்திற்கு x அச்சிலிருந்து மிகப் பெரிய தூரத்திற்கு இயங்க, $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்னுங்கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியினது தூரம் பூச்சியத்தை அணுகும். $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்னுங் கோடு அம்முடிவில் வளையிக்கு ஓர் அணுகு கோடு என்று கூறப்படும்.



$y =$ தான் x.

θ வினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும், தான் $\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -$கோதா θ என்றும் தான் $\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) =$ கோதா θ என்றும் அறிவோம்.

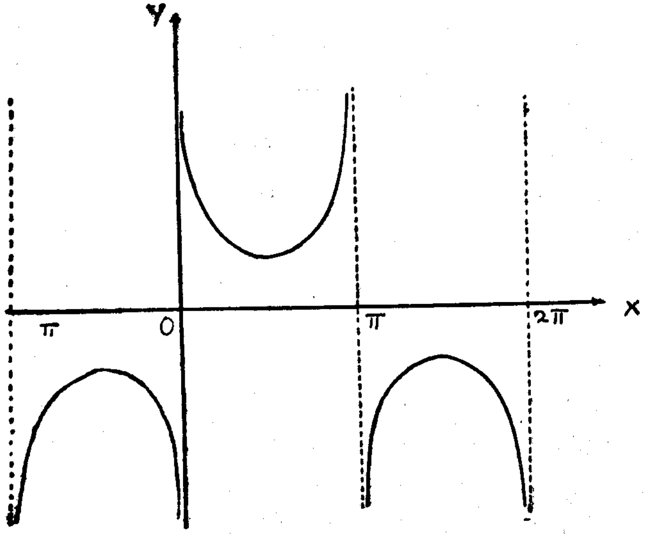
ஆகவே, $y =$ தான் x என்னும் வரையிலே தம் கிடைக்கூறுகள் $\dfrac{\pi}{2} - \theta, \dfrac{\pi}{2} + \theta$ என்பனவாகவுள்ள புள்ளிகளுக்குப் பருமனிற் சமனுங் குறியில் எதிருமாயுள்ள நிலைக்கூறுகள் இருக்கும். ஆகவே, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள அவ்வரையின் பகுதி x அச்சிற்குக் கீழே கிடக்கும்; அதன் வடிவு $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள பகுதியினதாகும். தான் x இன் காலம் π ஆயிருக்கின்றமையால், $x = 0$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள வளையி $x = \pi$, $x = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையே மீண்டும் வரும்; பொதுவாக, n என்பது ஒரு முழுவெண்ணாயின், $x = n\pi$, $x = (n+1)\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையே அது மீண்டும் வரும். x ஆனது $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கூடுதலுற, தான் x ஆனது உறுதியாகக் கூடும். K என்பது யாதுமொரு பெரிய நேர்க் கணியமாயின் தான் x ஆனது இவ்வீச்சிற்குள் x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கே K என்னும் பெறுமானத்தைக் கொள்ளும்; x இன்

இப்பெறுமானம் $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடக்கும்; தான் x ஆனது இவ்வீச்சிற்குள் x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கே $-K$ என்னும் பெறுமானத்தைக் கொள்ளும்; இப்பெறுமானம் $-\frac{\pi}{2}, 0$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்.

$y =$ கோசீ x ஆகுக.

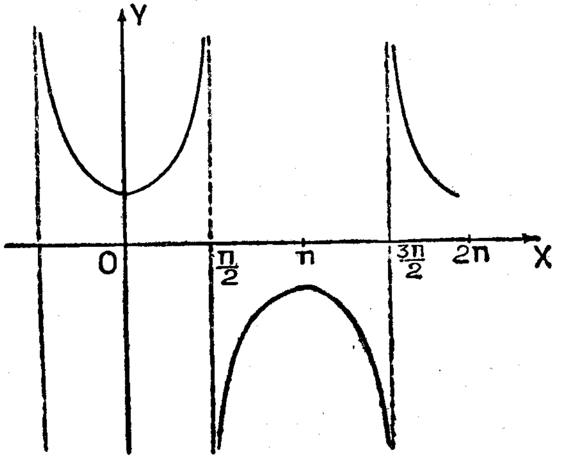
$x = 0$ ஆகும்பொழுது, சைன் $x = 0$. ஆகவே, கோசீ x என்பது இருப்பதில்லை. x ஆனது $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கூடுதலுற கோசீ x ஆனது நேர்க் குறியுள்ளதாய் உறுதியாகக் குறையும். x ஆனது $\frac{\pi}{2}, \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையே கூடுதலுற, கோசீ x ஆனது உறுதியாகக் கூடும். x ஆனது நேர்க்குறியுள்ளதாயும் பூச்சியத்திற்கு மிக அணித்தாயுமிருந்தால், கோசீ x ஆனது நேர்க் குறியுள்ளதாயும் மிகப் பெரிதாயும் இருக்கும். x ஆனது π யிற்கு மிக அணித்தாய் ஆனால் அதனிலுஞ் சிறிதாய் இருந்தால், கோசீ x ஆனது நேர்க் குறியுள்ளதாயும் மிகப் பெரிதாயும் இருக்கும்.

$x = 0$, $x = \pi$ என்பன $y =$ கோசீ x என்னும் வரைபினுடைய அணுகு கோடுகள்.



$y =$ கோசீ x

கோசீ $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ கோசீ $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ஆயிருத்தலால், வரைபு, $x = \frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோடுபற்றிச் சமச்சீராகும். கோசீ $(\pi + x) = -$ கோசீ $(\pi - x)$ ஆயிருத்தலால், $x = \pi$, $x = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள வரைபுப் பகுதி $x = 0, x = \pi$, என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள பகுதியின் வடிவினதாகும்; ஆனால், அது x அச்சிற்குக் கீழே கிடக்கும்.



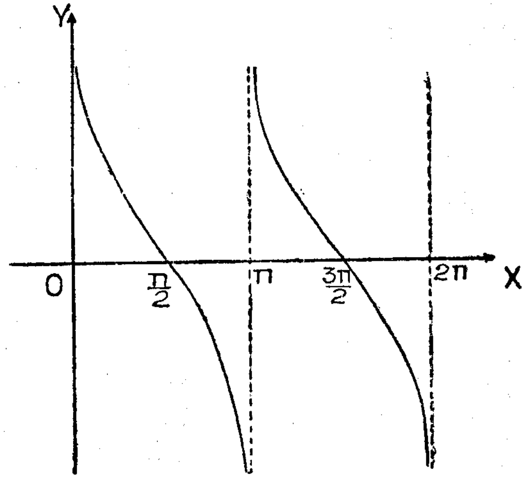
$y =$ சீக x ஆகுக.

கோசீ $\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ சீக x ஆயிருத்தலால், $y =$ சீக x என்னும் வரைபு $y =$ கோசீ x என்னும் வரைபை $\frac{\pi}{2}$ என்னுந் தூரத்திற்கூடாக x அச்சின் மறைத் திசையிற் பெயர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$y =$ கோதா x ஆகுக.

கோதா $x = \frac{\text{கோசை } x}{\text{சைன் } x}$ ஆயிருத்தலால், $y =$ கோதா x என்னும் வரைபின் வடிவம் $y =$ தான் x என்பதிற் போல உடன் பெறப்படும்.

$x = 0$, $x = \pi$ என்னுங் கோடுகள் அணுகுகோடுகளாகும்.



$\frac{\pi}{4}$ இனுடைய விகிதங்கள்.

OAB என்பது $OA = AB$ ஆகவுள்ள ஒரு செங்கோண முக்கோணி யாகுக. ஆயின், $\angle BOA = \frac{\pi}{4}$ ஆரையன்.

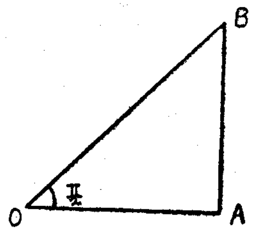
$\therefore$ சைன் $\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{OB}$, கோசை $\frac{\pi}{4} = \frac{OA}{OB}$.

$OA = 1$ ஆயின், $AB = 1$, $OB = \sqrt{2}$.

$\therefore$ சைன் $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ கோசை $\frac{\pi}{4}$; தான் $\frac{\pi}{4} = 1$.

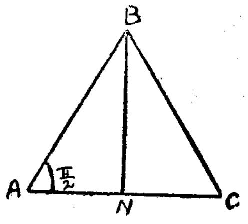
கோணம் பாகையில் அளக்கப்படின்,

சைன் $45° =$ கோசை $45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; தான் $45° = 1$.



$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ என்பனவற்றினுடைய விகிதங்கள்.

ABC என்பது $AB = BC = CA = 1$ ஆகவுள்ள சமபக்க முக்கோணி யாகுக. BN என்பது AC யிற்கு வரைந்த செங்குத்தாகுக.



ஆயின் $AN = \frac{1}{2}$, $BN = \frac{\sqrt{3}}{1}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ சைன் $\frac{\pi}{3} = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$ சைன் $60°$;

கோசை $\frac{\pi}{3} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} =$ கோசை $60°$.

$\angle ABN = \frac{\pi}{6}$ ஆயிருக்கின்றமையால்,

சைன் $\frac{\pi}{6} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} =$ சைன் $30°$;

கோசை $\frac{\pi}{6} = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$ கோசை $30°$.

உதாரணங்கள்

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றையும் பொதுமைப் படுத்துக.

(i) சைன்$^2 x = \frac{3}{4}$, (ii) கோசை $x = -\frac{1}{2}$, (iii) சைன் $x +$ கோசை $x = 0$.

(i) சைன்$^2 x = \frac{3}{4}$ ஆயின், சைன் $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ சைன் $x =$ சைன் $\frac{\pi}{3}$ அல்லது சைன் $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore$ $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ அல்லது $n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

அதாவது, $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; இங்கு n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்.

(ii) கோசை $x = -\frac{1}{2} = -$கோசை $\frac{\pi}{3} =$ கோசை $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore$ $x = 2n\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

இங்கு n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்.

(iii) சைன் $x +$ கோசை $x = 0$ ஆயின், கோசை x என்பது பூச்சியமாகாது ; அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு : கோசை $x = 0$ ஆயின், சைன் x என்பது ± 1 ஆகும் ; ஆகவே, சைன் $x +$ கோசை x என்பது பூச்சியமாகாது.

ஆகவே, கோசை x ஆல் வகுத்து அச்சமன்பாட்டை தான் $x + 1 = 0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$\therefore$ தான் $x = -1 = -$தான் $\frac{\pi}{4} =$ தான் $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = n\pi - \frac{\pi}{4}$,

இங்கு n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்.

பயிற்சி 3

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

(1) கோசை x − கோசை^{2} $x=0$. (2) சைன் $x+2$ சைன்^{2} $x=0$.

(3) தான் $x+$ கோதா $x=2$. (4) 2 சீக x − சீக^2 $x=0$.

(5) சைன் $2x+$ கோசை $x=0$. (6) கோசை $3x+$ கோசை $5x=0$.

(7) சைன் $2x+$ சைன் $3x=0$. (8) தான் $2x+$ தான் $3x=0$.

(9) கோதா $x+$ கோதா $2x=0$. (10) தான்$^2x=$ தான்^{2} $2x$.

(11) தான் $3x+$ கோதா $2x=0$. (12) கோசீ x − சீக $5x=0$.

(13) சைன்^{2} $x+(\sqrt{3}+1)$ சைன் x கோசை $x+\sqrt{3}$ கோசை^{2} $x=0$.

(14) கோசை^{2} $x+$ சைன் x கோசை $x+2$ சைன்^{2} $x=1$.

நேர்மாறு சார்புகள்

சைன் $y=x$ ஆயின், $y=$ சைன்$^{-1}$ x என எழுதுகின்றோம். ஒரு கோணத்தின் சைன் ஆனது -1 இலுஞ் சிறிதாய் அல்லது 1 இலும் பெரிதாய் இருக்க முடியாதாகையால், $-1 \leq x \leq 1$ ஆயிருக்கும்பொழுதே சைன்$^{-1}$ x இற்குப் பொருள் உண்டு. இவ்வீச்சிற்குள் x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் சைன்^{-1}x இற்கு எத்தொகையான பெறுமானங்களும் இருக்கலாம். α என்பது அதனுடைய பெறுமானங்களுள் ஒன்றாயின் n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்ணாயிருக்கும்பொழுது $n\pi+(-1)^n\alpha$ என்பதும் ஒரு பெறுமானமாகும். சைன்$^{-1}$ x என்பதன் பெறுமானத்தை $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே (அவையிரண்டையும் உட்படுத்திக்) கிடக்கும்படி கட்டுப்படுத்தினால், -1, $+1$ என்பவற்றை உட்படுத்தி அவற்றிடையிற் கிடக்கும் x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் ஒத்ததாய் சைன்$^{-1}$ x இற்கு ஒரு பெறுமானமே இருக்கும். அது சைன்$^{-1}$ x இனுடைய தலைமைப் பெறுமானம் எனப்படும். $x=0$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் ; $x=1$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் $\frac{\pi}{2}$ ஆகும் ; $x=-1$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் $-\frac{\pi}{2}$ ஆகும். $0<x<1$ ஆயின் தலைமைப் பெறுமானம் $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்; $-1<x<0$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் $-\frac{\pi}{2}$, 0 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்.

கோசை $y=x$ ஆயின், $y=$ கோசை$^{-1}$ x என எழுதுகின்றோம். ஆயின், $-1 \leq x \leq 1$ ஆகும்பொழுதே கோசை^{-1}x என்பது உண்டு. இவ்வீச்சிற்குள் x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் கோசை^{-1}x இற்கு எத்தொகையான பெறுமானங்களும் இருக்கலாம். அப்பெறுமானங்களுள் α என்பது

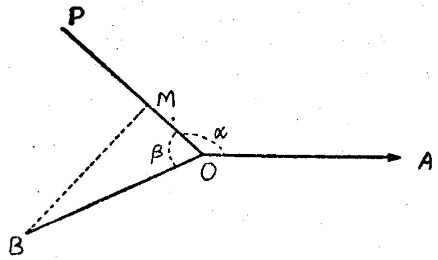
ஒரு பெறுமானமாயின், n என்பது ஒரு முழுவெண்ணாயிருக்கும்பொழுது $2n\pi+\alpha$ என்பதும் ஒரு பெறுமானமாகும். கோசை^{-1}x என்பது 0; π என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடக்கும்படி கட்டுப்படுத்தப்பட்டால், மேலுள்ள வீச்சில் x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் கோசை^{-1}x இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு. இது கோசை^{-1}x இனது தலைமைப் பெறுமானம் எனப்படும்.

$x=$ தான் y ஆயின், $y=$ தான்^{-1}x என எழுதுகின்றோம். மேலுள்ள இரு நேர்மாறு சார்புகளைப்போலன்றி தான்^{-1}x ஆனது x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் உண்டு. x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் தான்^{-1}x என்பதற்கு எத்தொகையான பெறுமானங்களும் இருக்கலாம். அப்பெறுமானங்களுள் α என்பது ஒரு பெறுமானமாயின், n என்பது ஒரு முழுவெண்ணாயிருக்கும்பொழுது $n\pi+\alpha$ என்பதும் ஒரு பெறுமானமாகும். தான்^{-1}x என்பது $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்படி கட்டுப்படுத்தப்பட்டால், x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் ஒத்ததாய் தான்^{-1}x இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு. இப்பெறுமானம் தான்^{-1}x இனது தலைமைப் பெறுமானம் எனப்படும். $x=0$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் ; $x>0$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும் ; $x<0$ ஆயின், தலைமைப் பெறுமானம் $-\frac{\pi}{2}$, 0 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்.

அத்தியாயம் 4

கூட்டற் சூத்திரங்கள்.

OP என்பது OA யோடு α என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக; OB என்பது OP யோடு β என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக; ஆயின், OB என்பது OA யோடு $\alpha+\beta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும். OA யின்மீது OB யின் எறியம் OB கோசை $(\alpha+\beta)$ வாகும். OM என்பது OP யின் மீது OB யின் எறியமாகுக. ஆயின், OP யினது திசையில் ஒரு நீளமாகக் கொள்ளப்படும் OM ஆனது OB கோசை β வாகும்; OP யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குந் திசையில் ஒரு நீளமாகக் கொள்ளப்படும் MB யானது OB சைன் β வாகும்.



OP யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குந் திசை OA யோடு $\frac{\pi}{2}+\alpha$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்.

OA மீது OB யின் எறியம் $=$ OA மீது OM இன் எறியம் $+$ OA மீது MB யின் எறியம்.

$$\therefore OB\ \text{கோசை}(\alpha+\beta) = OM\ \text{கோசை}\ \alpha + MB\ \text{கோசை}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= OB\ \text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta - OB\ \text{சைன்}\ \beta\ \text{சைன்}\ \alpha.$$

$$\therefore \text{கோசை}\ (\alpha+\beta) = \text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta - \text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta.$$

OA யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குங் கோட்டின்மீது எறியங்களை எடுக்க,

$$OB\ \text{சைன்}(\alpha+\beta) = OB\ \text{கோசை}\beta\ \text{சைன்}\ \alpha + OB\ \text{சைன்}\ \beta\ \text{சைன்}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \text{சைன்}\ (\alpha+\beta) = \text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta + \text{கோசை}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta.$$

இச் சூத்திரங்கள் எப்பருமனேயுங் குறியையுங் கொண்ட கோணங்களுக்கும் உண்மையாகும்.

β என்பதை $-\beta$ வாக மாற்ற, பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்:—

$$\text{கோசை}\ (\alpha-\beta) = \text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ (-\beta) - \text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ (-\beta)$$
$$= \text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta + \text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta\ ;$$
$$\text{சைன்}\ (\alpha-\beta) = \text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ (-\beta) + \text{கோசை}\ \alpha\ \text{சைன்}\ (-\beta)$$
$$= \text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta - \text{கோசை}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta.$$

கோசை $(\alpha+\beta) \neq 0$ ஆயின்,

$$\text{தான்}\ (\alpha+\beta) = \frac{\text{சைன்}\ (\alpha+\beta)}{\text{கோசை}\ (\alpha+\beta)} = \frac{\text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta + \text{கோசை}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta}{\text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta - \text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta}.$$

கோசை α, கோசை β என்பன பூச்சியமல்லாதனவாயின், தொகுதியையும் பகுதியையும் கோசை α கோசை β வால் வகுக்கலாம்.

$$\therefore\ \text{தான்}\ (\alpha+\beta) = \frac{\text{தான்}\ \alpha + \text{தான்}\ \beta}{1 - \text{தான்}\ \alpha\ \text{தான்}\ \beta},$$

β என்பதை $(-\beta)$ வாக மாற்ற,

$$\text{தான்}\ (\alpha-\beta) = \frac{\text{தான்}\ \alpha - \text{தான்}\ \beta}{1 + \text{தான்}\ \alpha\ \text{தான்}\ \beta}.$$

$$\text{சைன்}\ (\alpha+\beta) + \text{சைன்}\ (\alpha-\beta) = 2\ \text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta.$$
$$\text{சைன்}\ (\alpha+\beta) - \text{சைன்}\ (\alpha-\beta) = 2\ \text{கோசை}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta.$$
$$\text{கோசை}\ (\alpha+\beta) + \text{கோசை}\ (\alpha-\beta) = 2\ \text{கோசை}\ \alpha\ \text{கோசை}\ \beta.$$
$$\text{கோசை}\ (\alpha+\beta) - \text{கோசை}\ (\alpha-\beta) = -2\ \text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta.$$

$\therefore$ $\alpha+\beta=\theta$ வாயும் $\alpha-\beta=\phi$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\text{சைன்}\ \theta + \text{சைன்}\ \phi = 2\ \text{சைன்}\ \frac{\theta+\phi}{2}\ \text{கோசை}\ \frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\text{சைன்}\ \theta - \text{சைன்}\ \phi = 2\ \text{கோசை}\ \frac{\theta+\phi}{2}\ \text{சைன்}\ \frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\text{கோசை}\ \theta + \text{கோசை}\ \phi = 2\ \text{கோசை}\ \frac{\theta+\phi}{2}\ \text{கோசை}\ \frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\text{கோசை}\ \theta - \text{கோசை}\ \phi = -2\ \text{சைன்}\ \frac{\theta+\phi}{2}\ \text{சைன்}\ \frac{\theta-\phi}{2}$$

$$= 2\ \text{சைன்}\ \frac{\theta+\phi}{2}\ \text{சைன்}\ \frac{\phi-\theta}{2}$$

என்பன.

பயிற்சி 4.

1. சைன் $(x+y)$ சைன் $(x-y)$ = சைன்^2x − சைன்^2y என்றும், கோசை $(x+y)$ கோசை $(x-y)$ = கோசை^2x − சைன்^2y என்றுங் காட்டுக.

2. r, α என்பன x ஐச் சாராவாறு 3 சைன் $x+4$ கோசை x என்பது r கோசை $(x-\alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாமெனக் காட்டுக; x இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் 3சைன் $x+4$ கோசை x என்பதற்கு -5 என்னும் இழிவுப் பெறுமானமும் 5 என்னும் உயர்வுப் பெறுமானமும் உண்டெனக் காட்டுக. இழிவுப் பெறுமானம் பெறப்பட்ட x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரு பொதுக்கோவை தருக.

4—R 11681 (1/66)

3. கோசை x + கோசை $y = 1$ ஆயின், சைன் x + சைன் y என்பது $-\sqrt{3}$, $+\sqrt{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே (இரண்டும் உட்படக்) கிடக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

4. கோசை x + கோசை y + கோசை $z = 0$ ஆயும்

$$\text{சைன் } x + \text{சைன் } y + \text{சைன் } z = 0 \text{ ஆயுமிருந்தால்,}$$

கோசை$(x-y)$ = கோசை$(y-z)$ = கோசை$(z-x) = -\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

5. தான் $(x+y)$ = தான் x + தான் y ஆயின், x, y, $x+y$ என்பனவற்றுள் ஒன்றுதல் π யின் (பூச்சியம் உட்பட) மடங்காதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

6. $x+y = \pi - z$ ஆயிருக்க, x, y, z என்பன $\pi/_2$ இனுடைய ஒற்றை மடங்குகளல்லவாயின்,

தான்x + தான்y + தான்z = தான்x தான்y தான்z எனக் காட்டுக.

7. சைன் x + சைன் $2x$ + சைன் $3x = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க; n என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயிருக்கும் பொழுது உமது தீர்வை $x = \frac{n\pi}{2}$ அல்லது $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

8. x, y என்பன $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால்,

தான் x − தான் $y \geqslant$ சைன் $(x-y)$ எனக் காட்டுக.

9. தான் $\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = 4$ தான் $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

10. சைன் x + சைன் y + சைன் $(x+y) = 0$ ஆயின், $x+y$ என்பது π யின் இரட்டை மடங்காகும் அல்லது x, y என்பனவற்றுள் ஒன்றுதல் π யின் ஒற்றை மடங்காகுமெனக் காட்டுக.

11. கோசை x + கோசை $y = 1$ ஆயும், சைன் x + சைன் $y = 1$ ஆயுமிருக்க, n என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயின், $x+y = (2n+\frac{1}{2})\pi$ எனக் காட்டுக. x ஆதல் y ஆதல் 2π யின் ஒரு மடங்காக வேண்டுமெனக் காட்டுக.

12. α, β என்பன தந்த கோணங்களாயின்,

கோசை α கோசை$(\theta+\beta)$ + சைன் α கோசை $(\theta-\beta)$

என்பதனுடைய உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களை θ வினுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்குங் காண்க; β, $\alpha - \frac{\pi}{4}$ என்பன $\frac{\pi}{2}$ இனுடைய ஒற்றை மடங்குகளல்லனவாய் இருக்கும்போது, பெற்ற உயர்வுப் பெறுமானத்திற்குரிய θ வின் பெறுமானம் தான் θ = தான் β தான் $\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமெனக் காட்டுக.

13. x இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்
x சைன் x + கோசை $x \leqslant \sqrt{(1+x^2)}$ எனக் காட்டுக.

14. x அல்லது y என்பது π யின் ஒற்றை மடங்குகளுள் ஒன்றெனக் காட்டிக் கொண்டு

$$\text{கோசை } x \text{ கோசை } y + \tfrac{1}{2} = 0,$$

$$\text{சைன் } x + \text{சைன் } y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

மடங்குக் கோணங்களுடைய விகிதங்கள்.

x, y என்பன இரு கோணங்களாயின்,

$$\text{சைன் } (x+y) = \text{சைன் } x \text{ கோசை } y + \text{கோசை } x \text{ சைன் } y,$$

$$\text{கோசை } (x+y) = \text{கோசை } x \text{ கோசை } y - \text{சைன் } x \text{ சைன் } y;$$

$y = x$ எனப்பிரதியிட,

$$\text{சைன் } 2x = 2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x,$$

$$\text{கோசை } 2x = \text{கோசை}^2 x - \text{சைன்}^2 x \text{ என்பன.}$$

கோசை$^2x = 1 -$ சைன்^2x ஆயும் சைன்$^2x = 1 -$ கோசை^2x ஆயும் இருத்தலால்,

$$\text{கோசை}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \text{கோசை } 2x),$$

$$\text{சைன்}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \text{கோசை } 2x) \text{ என்பன,}$$

$$\text{கோசை } 2x \neq 0 \text{ ஆயின், தான் } 2x = \frac{\text{சைன் } 2x}{\text{கோசை } 2x}$$

$$= \frac{2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x}{\text{கோசை}^2 x - \text{சைன்}^2 x}$$

கோசை x ஆனது பூச்சியம் அன்றெனின், கோசை^2x ஆலே தொகுதி பகுதிகளை வகுக்க,

$$\text{தான் } 2x = \frac{2 \text{ தான் } x}{1 - \text{தான்}^2 x}.$$

கோசை x ஆனது பூச்சியம் அன்றெனின், சைன் $2x$, கோசை $2x$ என்பன வும் தான் x இற் பின்வருமாறு உணர்த்தப்படலாம்.

$$\text{சைன் } 2x = 2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x = \frac{2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x}{\text{கோசை}^2 x + \text{சைன்}^2 x}$$

$$= \frac{2 \text{ தான் } x}{1 + \text{தான்}^2 x}.$$

$$\text{கோசை } 2x = \frac{\text{கோசை}^2 x - \text{சைன்}^2 x}{\text{கோசை}^2 x + \text{சைன்}^2 x} = \frac{1 - \text{தான்}^2 x}{1 + \text{தான்}^2 x}.$$

x என்பதை $\frac{x}{2}$ ஆல் இடம்பெயர்க்க, கோசை $\frac{x}{2} \neq 0$ ஆகும் பொழுது

$$\text{சைன் } x = 2 \text{ சைன் } \frac{x}{2} \text{ கோசை } \frac{x}{2} = \frac{2 \text{ தான் } \frac{x}{2}}{1 + \text{தான்}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{கோசை } x = \text{கோசை}^2 \frac{x}{2} - \text{சைன்}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \text{தான்}^2 \frac{x}{2}}{1 + \text{தான்}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{தான் } x = \frac{2 \text{ தான் } \frac{x}{2}}{1 - \text{தான்}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{என்பன.}$$

$$\text{சைன் } 3x = \text{சைன் } (2x+x) = \text{சைன் } 2x \text{ கோசை } x + \text{கோசை } 2x \text{ சைன் } x$$
$$= 2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x. \text{ கோசை } x + \text{சைன் } x\ (1 - 2 \text{ சைன்}^2 x)$$
$$= 2 \text{ சைன் } x\ (1 - \text{சைன்}^2 x) + \text{சைன் } x (1 - 2 \text{ சைன்}^2 x)$$
$$= 3 \text{ சைன் } x - 4 \text{ சைன்}^3 x.$$

$$\text{கோசை } 3x = \text{கோசை } (2x+x) = \text{கோசை } 2x \text{ கோசை } x - \text{சைன் } 2x \text{ சைன் } x$$
$$= \text{கோசை } x\ (2 \text{ கோசை}^2 x - 1) - \text{சைன் } x.\ 2 \text{ சைன் } x \text{ கோசை } x$$
$$= 2 \text{ கோசை}^3 x - \text{கோசை } x - 2 \text{ கோசை } x\ (1 - \text{கோசை}^2 x)$$
$$= 4 \text{ கோசை}^3 x - 3 \text{ கோசை } x.$$

கோசை $3x \neq 0$ ஆயின்,

$$\text{தான் } 3x = \frac{\text{சைன் } 3x}{\text{கோசை } 3x} = \frac{3 \text{ சைன் } x - 4 \text{ சைன்}^3 x}{4 \text{ கோசை}^3 x - 3 \text{ கோசை } x}.$$

கோசை x என்பதும் பூச்சியமன்றெனின், கோசை$^3 x$ ஆலே தொகுதியையும் பகுதியையும் வகுக்க

$$\text{தான் } 3x = \frac{3 \text{ தான் } x \text{ சீக}^2 x - 4 \text{ தான்}^3 x}{4 - 3 \text{ சீக}^2 x}$$
$$= \frac{3 \text{ தான் } x\ (1 + \text{தான்}^2 x) - 4 \text{ தான்}^3 x}{4 - 3\ (1 + \text{தான்}^2 x)}$$
$$= \frac{3 \text{ தான் } x - \text{தான்}^3 x}{1 - 3 \text{ தான்}^2 x}.$$

x என்பதை $\frac{x}{3}$ என்பதால் இடம் பெயர்க்க,

$$\text{சைன் } x = 3 \text{ சைன் } \frac{x}{3} - 4 \text{ சைன்}^3 \frac{x}{3}.$$

$$\text{கோசை } x = 4 \text{ கோசை}^3 \frac{x}{3} - 3 \text{ கோசை } \frac{x}{3}.$$

$$\text{தான் } x = \frac{3 \text{ தான் } \frac{x}{3} - \text{தான்}^3 \frac{x}{3}}{1 - 3 \text{ தான்}^2 \frac{x}{3}} \quad \text{என்பன.}$$

உதாரணங்கள் :—

(1) சைன் $^4 x$, கோசை$^4 x$, என்பனவற்றை கோசை $2x$, கோசை $4x$ என்பனவற்றில் உணர்த்துக.

$$\text{சைன்}^4 x = (\text{சைன்}^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \text{கோசை} 2x}{2}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(1 - 2 \text{ கோசை } 2x + \text{கோசை}^2 2x)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1 - 2 \text{ கோசை } 2x + \frac{1 + \text{கோசை} 4x}{2}\right)$$
$$= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } 2x + \tfrac{1}{8} \text{ கோசை } 4x.$$

$$\text{கோசை}^4 x = (\text{கோசை}^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \text{கோசை} 2x}{2}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(1 + 2 \text{ கோசை } 2x + \text{கோசை}^2\ 2x)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + 2 \text{ கோசை } 2x + \frac{1 + \text{கோசை } 4x}{2}\right)$$
$$= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } 2x + \tfrac{1}{8} \text{ கோசை } 4x.$$

(2) $x + y + z = \pi$ ஆயின்,

$$\text{சைன் } x + \text{சைன் } y + \text{சைன் } z = 4 \text{ கோசை} \frac{x}{2} \text{ கோசை} \frac{y}{2} \text{ கோசை} \frac{z}{2}.$$

$$\text{சைன் } x + \text{சைன் } y = 2 \text{ சைன் } \frac{x+y}{2} \text{ கோசை } \frac{x-y}{2}$$
$$= 2 \text{ சைன் } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}\right) \text{ கோசை } \frac{x-y}{2}$$
$$= 2 \text{ கோசை} \frac{z}{2} \text{ கோசை} \frac{x-y}{2}.$$

$$\therefore \text{ சைன் } x + \text{சைன் } y + \text{சைன் } z = 2 \text{ கோசை } \frac{z}{2} \text{ கோசை} \frac{x-y}{2} + 2 \text{ சைன் } \frac{z}{2} \text{ கோசை } \frac{z}{2}$$
$$= 2 \text{ கோசை} \frac{z}{2}\left(\text{கோசை} \frac{x-y}{2} + \text{சைன்} \overline{\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}}\right)$$
$$= 2 \text{ கோசை} \frac{z}{2}\left(\text{கோசை } \frac{x-y}{2} + \text{கோசை} \frac{x+y}{2}\right)$$
$$= 4 \text{ கோசை} \frac{x}{2} \text{ கோசை } \frac{y}{2} \text{ கோசை} \frac{z}{2}.$$

(3) $x+y+z=\pi$ ஆயின்,

கோசை x + கோசை y + கோசை $z \leqslant \frac{3}{2}$

$$\text{கோசை}\, x+\text{கோசை}\, y+\text{கோசை}\, z=2\ \text{கோசை}\frac{x+y}{2}\text{கோசை}\frac{x-y}{2}+1-2\ \text{சைன்}^2\frac{z}{2}$$

$$=1-2\left(\text{சைன்}^2\frac{z}{2}-\text{சைன்}\frac{z}{2}\ \text{கோசை}\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=1-2\left(\text{சைன்}\frac{z}{2}-\tfrac{1}{2}\text{கோசை}\frac{x-y}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\text{கோசை}^2\frac{x-y}{2}$$

$$\leqslant 1+\tfrac{1}{2}\text{கோசை}^2\frac{x-y}{2}.$$

இங்கு சமன்படுதல் $\text{சைன்}\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\text{கோசை}\frac{x-y}{2}$ ஆகும் பொழுதே உண்மையாகும்.

$\therefore\ \text{கோசை}^2\frac{x-y}{2}\leqslant 1$ ஆயிருப்பதால்,

$$\text{கோசை}\, x+\text{கோசை}\, y+\text{கோசை}\, z\leqslant\frac{3}{2}.$$

x, y, z என்பன எல்லாம் நேராயின், அவை π ஐ அதிகரிக்க இயலாமையால் $x=y$ யாகும் பொழுதே

$$\text{கோசை}^2\frac{x-y}{2}=1.$$

$\therefore\ \text{சைன்}\frac{z}{2}=\frac{1}{2}$ ஆயிருக்கும் போது,

$$\text{கோசை}\, x+\text{கோசை}\, y+\text{கோசை}\, z=\frac{3}{2};$$

அதாவது $\frac{z}{2}=\frac{\pi}{6}$ அல்லது $z=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ x, y, z என்பன ஒரு முக்கோணியினுடைய கோணங்களாயின் கோசை x + கோசை y + கோசை $z \leqq \frac{3}{2}$.

இங்கு $x=y=z=\frac{\pi}{3}$ ஆகும் பொழுதே சமன்படுதல் உண்மையாகும். அதாவது, அம்முக்கோணி சமகோண முக்கோணி ஆகும் பொழுதே

கோசை x + கோசை y + கோசை z என்பதன் உயர்வுப் பெறுமானம் பெறப்படும்.

சைன் 18°, கோசை 36° என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்கள்.

$18^\circ=\frac{\pi}{10}$ ஆரையன்கள்.

$x=\frac{\pi}{10}$ ஆயின், $5x=\frac{\pi}{2}$;

$\therefore\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x.$

$\therefore$ கோசை $3x$ = சைன் $2x$.

$\therefore$ 4 கோசை^3x − 3 கோசைx = 2 சைன்x கோசை x.

கோசை$x \neq 0$ ஆயிருக்கின்றமையால், கோசை x ஆலே இரு பக்கமும் வகுக்கப் படலாம்.

$\therefore$ 4 கோசை^2x − 3 = 2 சைன் x.

$\therefore$ 4(1 − சைன்^2x) − 3 = 2 சைன் x.

$\therefore$ 4 சைன்^2x + 2 சைன் x − 1 = 0.

t = சைன் x எனப்பிரதியிட,

$4t^2+2t-1=0.$

$$\therefore\ t=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

x என்பது $0, \frac{\pi}{2}$ என்பவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தலால், சைன் x என்பது நேராகும்.

$$\therefore\ \text{சைன்}\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\therefore\ \text{சைன்}\ 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\text{கோசை}\ 36^\circ=1-2\ \text{சைன்}^2 18^\circ=1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$$

$$=\frac{8-(5+1-2\sqrt{5})}{8}=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

பயிற்சி 5

1. $x+y+z=\pi$ ஆயின்,

கோசைx + கோசைy + கோசைz = $1+4\ \text{சைன்}\frac{x}{2}\ \text{சைன்}\frac{y}{2}\ \text{சைன்}\frac{z}{2}$ எனக் காட்டுக.

2. $x+y+z=2\pi$ ஆயின்,

சைன் x + சைன் y + சைன் z = $4\ \text{சைன்}\frac{x}{2}\ \text{சைன்}\frac{y}{2}\ \text{சைன்}\frac{z}{2}$ என்றும்,

கோசை x + கோசை y + கோசை z + 1 = $-4\ \text{கோசை}\frac{x}{2}\text{கோசை}\frac{y}{2}\text{கோசை}\frac{z}{2}$ என்றுங் காட்டுக.

3. கோசை$^2x+$கோசை$^2y+$கோசை$^2z-2$ கோசை x கோசை y கோசை $z-1=0$ ஆயின், கோசை $z=$கோசை $(x+y)$ அல்லது கோசை $(x-y)$ எனக் காட்டுக.

4. கோசை$^4x-$சைன்$^4x=$ கோசை$2x$ எனக் காட்டுக.

5. x என்பது $0, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால்,

கோசை $x+$சைன் $x=\sqrt{(1+\text{சைன்}2x)}$ என்றும்,

$0<x<\frac{\pi}{4}$ எனின், கோசை $x-$சைன் $x=\sqrt{(1-\text{சைன் }2x)}$ என்றும்,

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ எனின், அது $=-\sqrt{(1-\text{சைன் }2x)}$ என்றுங் காட்டுக.

6. 8 (கோசை$^6x+$சைன்^6x) $=5+3$ கோசை $4x$ என நிறுவுக.

7. சைன்$2x+$கோசை $x+$சைன் $x=1$ ஆயின்,
கோசை $x+$சைன் $x=1$ எனக் காட்டுக.

8. 2 கோசை$^2x+4$கோசை x சைன் $x-$சைன்^2x என்பதனை rகோசை$(2x+\alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்துதலால், x இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் அக்கோவையினுடைய உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. சைன்$x+$சைன்$y=a$ யாயும் கோசை $x+$கோசை $y=b$ யாயும் இருந்தால்,

சைன்$(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ என்றும் கோசை $(x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$ என்றுங் காட்டுக ; a, b என்பன இரண்டும் பூச்சியமல்ல.

10. கோசை $x+2$சைன் $x=1$ ஆயின்

தான் $\frac{x}{2}=0$ அல்லது 2 எனக் காட்டுக.

11. சைன் $2x+$கோசை $x-$சைன் $x=1$ ஆயின்,
கோசை$x-$சைன்$x=0$ அல்லது 1 எனக் காட்டுக.

12. சைன் $6x+$சைன் $2x+2$ கோசை$^2 2x=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

13. 3தான்$2x+2$தான்$x=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

14. a என்பது $\frac{1}{3}$, 3 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால், π யின் மடங்கல்லாத x இன் யாதொரு பெறுமானத்திற்கும் தான் $3x$ என்பது a தான் x இற்குச் சமனுகாதெனக் காட்டுக.

15. தான் $\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ எனக் காட்டுக.

16. $x+y+z=\pi$ யாயின் கோசை xகோசைy கோசை$z\leqslant\frac{1}{8}$ என்றும்

சைன் $\frac{x}{2}$ சைன் $\frac{y}{2}$ சைன் $\frac{z}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ என்றுங் காட்டுக.

17. சைன்$^2x+$சைன்$^2y=$ சைன்$^2(x+y)$ ஆயின், $x+y$ என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்காகும் அல்லது x, y என்பனவற்றுள் ஒன்றுயினும் π யின் மடங்காகும்.

18. கோசை$^3x+$சைன்$^3x=$ கோசை $2x$ ஆயின், தான் $x=-1$ ஆகும் அல்லது கோசை $x-$சைன் $x=1$ ஆகும்.

19. 16 (சைன்$^6\theta+$கோசை$^6\theta$) $=7$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

20. தான்$3\theta+5$தான்$\theta=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

21. a(தான்$\theta+$கோதாθ) $=2$ ஆயும் b(தான்$2\theta+$கோதா2θ) $=2$ ஆயுமிருந்தால்,
$b^2=4a^2(1-a^2)$ எனக் காட்டுக.

அன்றியும், தான் $4\theta=\frac{b}{1-2a^2}$ என்றுங் காட்டுக.

22. θ, ϕ என்பன 2π யின் மடங்கால் வேற்றுமைப்படாத இரு கோணங்களாகி,
கோசை$2\theta-$கோசை$2\phi=$ கோசை$\theta-$கோசைϕ,
சைன்$2\theta-$சைன்$2\phi=$ சைன்$\theta-$சைன்ϕ,
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குமாயின்,
கோசை$\theta=$ கோசை$\phi=\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 5

a கோசை $\theta + b$சைன் $\theta = c$ என்னுஞ் சமன்பாடு.

a, b, c என்பன தந்த மாறிலிகளாயிருக்க, a, b என்பன பூச்சிய மல்லாதனவாய் இருக்கும்பொழுது,

a கோசை$\theta + b$ சைன் $\theta = c$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய பெறுமானங்களைக் (எவையேனுமிருந்தால்) காணும் முறைகளை இப்போது ஆராய்வோம். அச்சமன்பாடு

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ கோசை } \theta + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ சைன் } \theta = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

என எழுதப்படலாம். இங்கு, $\sqrt{(a^2+b^2)}$ என்பது (a^2+b^2) என்பதனுடைய நேர்வர்க்க மூலத்தைக் குறிக்கின்றது.

$\left\{\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}^2 + \left\{\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right\}^2 = 1$ ஆகின்றமையால், $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ $=$ கோசைα ஆகுமாறும் $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} =$ சைன்α ஆகுமாறும் α என்னும் ஒரு கோணத்தை காணலாம். அப்போது சமன்பாடு,

$$\text{கோசை } \theta \text{ கோசை } \alpha + \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \alpha = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, கோசை $(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

θ, α என்பனவற்றினுடைய எப்பெறுமானங்களுக்கும் கோசை$^2(\theta - \alpha)$ $\leqq 1$ ஆயிருத்தலால், $\frac{c^2}{a^2+b^2} \leq 1$ அல்லது $c^2 \leq a^2+b^2$ ஆயினுற்ருன் அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய பெறுமானங்கள் இருக்கும். இந்நிபந்தனை தீர்க்கப்பட்டால், கோசை $\beta = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆகும்படி 0, π என்பனவற்றிற்கு இடையே (இரண்டும் உட்பட) β என்னும் ஒரு கோணம் காணப்படலாம்.

ஆகவே, அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் பொதுப் பெறுமானம், n என்பது ஒரு முழுவெண்ணும் அல்லது பூச்சியமாயிருந்தால்,

$$\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta,$$

அல்லது

$$\theta = 2n\pi + \alpha \pm \beta$$

என்பதாலே தரப்படும்.

$c^2 < a^2 + b^2$ என்னும் வகை.

$$c^2 < a^2+b^2 \text{ ஆயின்,}$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} < 1.$$

அதாவது,

$$-1 < \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} < 1.$$

$$\therefore \quad 0 < \beta < \pi.$$

$\theta = 2n\pi + \alpha + \beta$ என்பதாலே தரப்படும் தீர்வுத் தொகுதிகளை எடுக்க. n_1, n_2 என்பன இரண்டு முழுவெண்களாயும் θ_1, θ_2 என்பன $n = n_1$, $n = n_2$ என்பனவற்றிற்கு ஒத்த θ வினுடைய பெறுமானங்களாயும் இருந்தால்,

$$\theta_2 - \theta_1 = 2(n_2 - n_1)\pi.$$

ஆகவே, இத்தொகுதியினுடைய பெறுமானங்களுள் எவையேனும் இரண்டு 2π யின் மடங்கொன்ருல் வேற்றுமைப்படும்.

அதுபோல, $\theta = 2\pi + \alpha - \beta$ என்பதாலே தரப்படும் θ வினுடைய எவையேனும் இரு பெறுமானங்கள் 2π யின் மடங்கொன்ருல் வேற்றுமைப்படும்.

இப்போது, முதலாந் தொகுதியின் ஒரு பெறுமானம் θ_1 என்பதை எடுக்க. n_1 என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயின், அது $2n_1\pi + \alpha + \beta$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். n_2 என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயின், இரண்டாந் தொகுதியின் ஒரு பெறுமானம் θ_2 என்பது $2n_2\pi + \alpha - \beta$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

$$\therefore \; \theta_1 - \theta_2 = 2(n_1 - n_2)\pi + 2\beta.$$

$0 < 2\beta < 2\pi$ ஆயிருத்தலால், $\theta_1 - \theta_2$ என்பது 2π யின் மடங்கு ஆகாது. ஆயின், முதலாந் தொகுதியின் யாதுமொரு கோணத்திற்கும் இரண்டாந் தொகுதியின் யாதுமொரு கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 2π யின் மடங்காகாது. ஒரே தொகுதியினுடைய எவையேனும் இரு கோணங்கள் 2π யின் மடங்கொன்ருல் வேற்றுமைப்படுகின்றமையால், ஒவ்வொரு தொகுதிக்கும் $0 \leq \theta < 2\pi$ என்னும் நிபந்தனையைத் தீர்க்கும் ஒருறுப்பே இருக்கும் என்பது பெறப்படும்.

ஆகவே, a கோசை$\theta + b$ சைன்$\theta = c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு 0, 2π என்பனவற்றிற்கு இடையே (0 உட்பட) இரு தீர்வுகளே உண்டு. வேறு தீர்வுகள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றுள் ஒன்றுக்கு 2π யின் மடங்கொன்றைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படும்.

ஆகவே, θ விற்கு எத்தொகையான பெறுமானங்கள் இருந்தாலும், கோசை θ, சைன் θ என்னும் ஒவ்வொன்றிற்கும் இரு பெறுமானங்களே இருக்கும்.

$c^2 = a^2+b^2$ என்னும் வகை.

$c^2 = a^2+b^2$ ஆகுக.

c என்பது நேராயின், $\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = 1$; ஆயின், $\beta = 0$.

ஆகவே, அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் பொதுப் பெறுமானம் $2n\pi+a$ என்பதாலே தரப்படும்.

ஆகவே அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய எவையேனும் இரு பெறுமானங்கள் 2π யின் மடங்கொன்றால் வேற்றுமைப்படும்.

c என்பது மறையாயின், $\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = -1$; ஆயின், $\beta = \pi$.

ஆகவே, θ வின் பொதுப் பெறுமானம் $2n\pi+\alpha\pm\pi$ என்பதாலே தரப்படும்.

$2n_1\pi+\alpha+\pi$ என்பதற்கும் $2n_2\pi+\alpha-\pi$ என்பதற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 2π யின் ஒரு மடங்காகிய $2(n_1-n_2)\pi+2\pi$ யாகும். ஆகவே, அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய எவையேனும் இரு பெறுமானங்களுக்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 2π யின் மடங்காகும். ஆகவே, $0\leq\theta<2\pi$ என்னும் வீச்சில், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் ஒரு பெறுமானமே உண்டு; வேறு யாதுந் தீர்வு இப்பெறுமானத்திற்கு 2π யின் மடங்கொன்றைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படும்.

θ விற்கு எத்தொகையான பெறுமானங்கள் இருந்தாலும், கோசை θ, சைன் θ என்னும் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு பெறுமானமே இருக்கும்.

உதாரணம். **4 கோசை θ − 3 சைன் $\theta = 3$** என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

அச்சமன்பாடு

$$\frac{4}{\sqrt{(4^2+3^2)}}\text{கோசை}\theta - \frac{3}{\sqrt{(4^2+3^4)}}\text{சைன் }\theta = \frac{3}{\sqrt{(4^2+3^2)}}$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

அதாவது, $\frac{4}{5}$கோசை$\theta - \frac{3}{5}$சைன்$\theta = \frac{3}{5}$.

α என்பது கோசை $\alpha = \frac{4}{5}$ ஆகுமாறும் சைன் $\alpha = \frac{3}{5}$ ஆகுமாறும்

0, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணமாயின்,

கோசை $(-\alpha) = \frac{4}{5}$ ஆயும் சைன் $(-\alpha) = -\frac{3}{5}$ ஆயுமிருக்கும். ஆகவே அச்சமன்பாடு

கோசை $(\theta+\alpha) = \frac{3}{5} =$ கோசை $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ஆகும்.

$$\therefore\quad \theta+\alpha = 2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

அதாவது, $\theta = 2n\pi+\frac{\pi}{2}-2\alpha$ அல்லது $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

வேறொரு வழி.

a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாடு

$$\text{கோசை }\theta = \frac{1-\text{தான்}^2\frac{\theta}{2}}{1+\text{தான்}^2\frac{\theta}{2}},\qquad \text{சைன் }\theta = \frac{2\ \text{தான்}\frac{\theta}{2}}{1+\text{தான்}^2\frac{\theta}{2}}$$

என்னுந் தொடர்புகளை வழங்குவதாலும் தீர்க்கப்படலாம்.

$t =$ தான் $\frac{\theta}{2}$ ஆயின், அச்சமன்பாடு

$$a(1-t^2)+2bt = c(1+t^2)\ ;$$

அதாவது $$(a+c)t^2-2bt+c-a=0$$

என்பதாகும். $a+c\neq0$ ஆயின் இது t யிலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு;

$$b^2-(a+c)(c-a)\geqslant 0,$$

அதாவது, $c^2\leqslant a^2+b^2$ ஆயின்,

இச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களானவை மெய்யாகும்.

$c^2<a^2+b^2$ ஆயின், அச்சமன்பாட்டிற்கு இரு வேறு மூலங்கள் இருக்கும். p,q என்பன அவ்விரு மூலகங்களாயின், தான் $\frac{\theta}{2}=p$ அல்லது q வாகும்.

α,β என்பன தான் $\frac{\alpha}{2}=p$ யாயும் தான் $\frac{\beta}{2}=q$ வாயும் இருக்குமாறுள்ள இரு கோணங்களாகுக.

$\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}$ என்பன $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்படி α, β என்பவற்றினுடைய தனியான பெறுமானங்களை எடுத்தல் இசைவாகும்.

$$\text{தான் }\frac{\theta}{2} = \text{தான் }\frac{\alpha}{2}\ \text{அல்லது தான் }\frac{\beta}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\theta}{2} = n\pi+\frac{\alpha}{2}\ \text{அல்லது}\ n\pi+\frac{\beta}{2}.$$

அதாவது, $\theta = 2n\pi+\alpha$ அல்லது $2n\pi+\beta$.

இவ்வண்ணம் இரு தீர்வுத் தொகுதிகளைப் பெறுகின்றோம்.

$\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}$ என்பனவற்றின் வித்தியாசத்தின் எண்ணளவுப் பெறுமானம் π யினுஞ் சிறியதாகையால், முதலாந் தொகுதியின் யாதுமொரு கோணத்திற்கும் இரண்டாந் தொகுதியின் யாதுமொரு கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 2π யின் மடங்காகாது.

$a+c=0$ ஆயின் t யில் பெறப்படும் சமன்பாடு $bt+a=0$ ஆகும். ஆயின் α வானது தான் $\frac{\alpha}{2}=-\frac{a}{b}$ ஆகுமாறுள்ள கோணமாயின், $\theta=2n\pi+\alpha$ என்னும் தீர்வுத் தொகுதி ஒன்றையே பெறுகின்ருேம். $\theta=\pi$ என்பது a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=-a$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குகின்றமையால் $\theta=(2n+1)\pi$ என்பது வேருெரு தீர்வுத் தொகுதியாகும்.

$c^2=a^2+b^2$ ஆயின், t யிலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு பொருந்து மூலங்களைத் தரும், ஆயின், $\alpha=\beta$.

ஆகவே, அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய எவையேனும் இரு பெறுமானங்கள் 2π யின் மடங்கொன்றுல் வேற்றுமைப்படும்.

4 கோசை $\theta-3$ சைன் $\theta=3$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க,

$$4(1-t^2)-6t=3\ (1+t^2).$$

அதாவது,
$$7t^2+6t-1=0.$$

$$\therefore\ (7t-1)\ (t+1)=0.$$

$$\therefore\ t=-1 \text{ அல்லது } +\frac{1}{7}.$$

$$\therefore\ \frac{\theta}{2}=-\frac{\pi}{4} \text{ அல்லது } \alpha;$$

இங்கு α என்பது தான் $\alpha=\frac{1}{7}$ ஆகுமாறு 0, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம்,

$$\therefore\ \frac{\theta}{2}=n\pi-\frac{\pi}{4} \text{ அல்லது } n\pi+\alpha.$$

$$\therefore\ \theta=2n\pi-\frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } 2n\pi+2\alpha.$$

பிழையான வழி.

a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாடு பின்வரும் வழியாலே தீர்க்கப்படலாமென இக்கணிதத்தைக் கற்கத் தொடங்குவோருக்குத் தோற்றலாம் :—

$$a \text{ கோசை } \theta-c=b\text{சைன் } \theta.$$

$$\therefore\quad (a \text{ கோசை } \theta-c)^2=b^2\text{சைன்}^2\theta=b(1-\text{கோசை}^2\theta).$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2) \text{ கோசை}^2\ \theta-2ac \text{ கோசை } \theta+c^2-b^2=0.$$

இது கோசை θ விலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு.

$$a^2c^2 \geqslant (a^2+b^2)\ (c^2-b^2),$$

அல்லது
$$0 \geqslant -a^2b^2+b^2c^2-b^4,$$

அல்லது
$$c^2 \geqslant a^2+b^2 \text{ ஆயின்,}$$

கோசை θ விற்கு, அது இரு மெய்ப்பெறுமானங்களைத் தரும்.

கோசை θ வினுடைய மெய்ப்பெறுமானங்கள் பெறப்பட அவற்றின் எண் பெறுமானங்கள் 1 ஐ அதிகரிக்காவாயின், θ வின் பொதுப்பெறுமானம் பெறப்படலாம்.

இவ்வண்ணம் பெறப்படும் θ வினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாம் ஆரம்பச் சமன்பாட்டைத் தீரா என்பதே இவ்வழியிலுள்ள குறை.

a கோசை $\theta-b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டோடு தொடங்கினேமாயினும் கோசையினிலுள்ள அதே இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்; ஆயின், இச்சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகளும் கோசை θ விலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகளுக்குள் அமைக்கப்படும்.

a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும் கோசை θ விலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும்; அன்றியும், a கோசை $\theta-b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும் கோசை θ விலுள்ள அதே இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும். இவ்வழியை வழங்கி கோசை θ விலுள்ள அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் பொதுப் பெறுமானத்தைப் பெற்ருேமாயின், a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னுந் தந்த சமன்பாட்டை θ வினுடைய பெறுமானங்களுள் எவை தீர்க்குமென்று உண்மையான பிரதியீட்டாலே துணிய முற்பட வேண்டும். யாதுமொரு சமன்பாட்டைத் தீர்த்தற்கண் $P^2=Q^2$ என்னுஞ் சமன்பாடு $P=Q$ வைக் கட்டாயமாகக் குறிக்கும் என்பதில்லை என ஞாபகத்தில் வைத்தல் பிரதானமானது.

a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்பதற்கு இவ்வழியை வழங்கல் ஆகாதெனினும், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த கோசை θ வினுடைய வேறு வேறு பெறுமானங்களைக் காண்பதற்கு அவ்வழி வழங்கப்படலாம். $c^2<a^2+b^2$ ஆயின் கோசை θ விற்கு இரண்டு வேருன பெறுமானங்களே இருக்குமென்று செவ்விய தீர்வுவழிகளால் இதற்குமுன்னே கண்டுள்ளோம். ஆரம்பச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் இங்கே பெற்ற கோசை θ விலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டையுந் தீர்க்கும். $c^2<a^2+b^2$ ஆயின், கோசை θ விலுள்ள இந்த இருபடிச் சமன்பாடும் கோசை θ விற்கு இரண்டு வேருன பெறுமானங்களைத் தரும். ஆகவே, இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் கோசை θ வினுடைய பெறுமானங்கள் a கோசை $\theta+b$ சைன் $\theta=c$ என்னும் ஆரம்பச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் கோசை θ வினுடைய பெறுமானங்களுக்குச் சமமாதல் வேண்டும். $c^2=a^2+b^2$ ஆயின், ஒவ்வொரு சமன்பாடும் கோசை θ விற்கு ஒரு பெறுமானத்தையே தரும்; இப்பெறுமானம் இரு வகைகளிலும் ஒரே பெறுமானமாயிருத்தல் வேண்டும்.

அதுபோல்,

$$b \text{ சைன் } \theta-c=-a \text{ கோசை } \theta$$

என எழுதி, சைன் θ வில்

$$(b \text{ சைன் } \theta-c)^2=a^2\ (1-\text{சைன்}^2\theta)$$

எனப் பெற்ருேமாயின், இச்சமன்பாட்டாலே தரப்படும் சைன் θ வினுடைய பெறுமானங்கள்

$$a \text{ கோசை } \theta+b \text{ சைன் } \theta=c$$

என்பதாலே தரப்படும் சைன் θ வினுடைய பெறுமானங்களுக்குச் சமமாகும்.

உதாரணமாக, 4 கோசை $\theta - 3$ சைன் $\theta = 3$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

ஆயின், $$(4\ \text{கோசை}\ \theta - 3)^2 = 9\,(1 - \text{கோசை}^2\theta).$$

$$\therefore\ 25\ \text{கோசை}^2\theta - 24\ \text{கோசை}\ \theta = 0.$$

அதாவது, $$\text{கோசை}\ \theta\,(25\ \text{கோசை}\ \theta - 24) = 0.$$

$$\therefore\ \text{கோசை}\ \theta = 0\ \text{அல்லது}\ \frac{24}{25}.$$

வரைபு முறை.

$c \neq 0$ ஆயின்,

$$a\ \text{கோசை}\ \theta + b\ \text{சைன்}\ \theta = c$$

என்னுஞ் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தையும் ஒரு நேர் கோட்டையும் வரைந்து குறித்த சில கோணங்களை அளத்தலால் வரைபு முறையாலே தீர்க்கப் படலாம். ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதத்திலே நிறுவப்பட்ட சில முடிபுகளை வழங்குகிறோம். P என்பது ஒரு தளத்தில் இரு செங்கோண அச்சுக்கள் பற்றித் தன்னுடைய ஆள்கூறுகள் x, y என்பனவாயுள்ள ஒரு புள்ளியாயிருக்க, O என்பது உற்பத்தியாயின்,

$$OP^2 = x^2 + y^2.$$

$$lx + my + n = 0,$$

என்னுஞ் சமன்பாடு

அத்தளத்தில் தன்னிலிருந்து உற்பத்தியின் செங்குத்துத் தூரத்தின் வர்க்கம்

$$n^2/(l^2 + m^2)$$

ஆகவுள்ள நேர் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

என்னுஞ் சமன்பாடு உற்பத்தியை மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவுமுடைய வட்டத்தைக் குறிக்கும். P என்பது இவ்வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியாயும் θ என்பது x அச்சினுடைய நேர்த்திசையோடு OP ஆக்குங் கோணமாயுமிருந்தால், P யினுடைய ஆள்கூறுகள் r கோசை θ, r சைன் θ என்பனவாகும் ; $c > o$ ஆயிருக்கும்பொழுது,

$$a\ \text{கோசை}\ \theta + b\ \text{சைன்}\ \theta = c$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தற்கு, $x^2 + y^2 = c^2$ என்னும் வட்டத்தையும் $ax + by = c^2$ என்னும் நேர்கோட்டையும் ஆராய்வோம். ஒரு புள்ளி அவ்வட்டத்தின்மீது கிடந்தால், அதனுடைய ஆள்கூறுகள் (c கோசை θ, c சைன் θ) என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும். இப்புள்ளி அந்நேர் கோட்டிலுங் கிடந்தால்,

$$ac\ \text{கோசை}\ \theta + bc\ \text{சைன்}\ \theta = c^2$$

அல்லது a கோசை $\theta + b$ சைன் $\theta = c$; மறுதலையாக,

a கோசை $\theta + b$ சைன் $\theta = c$ யாகும்படி θ விற்கு ஒரு பெறுமானம் உண்டெனக் கொள்க.

ஆயின்,

$$ac\ \text{கோசை}\ \theta + bc\ \text{சைன்}\ \theta = c^2\ ;$$

அதாவது, (c கோசை θ, c சைன் θ) என்பனவற்றைத் தன்னுடைய ஆள்கூறுகளாகவுள்ள புள்ளி $ax + by = c^2$ என்னும் நேர்கோட்டின் மீது கிடக்கும். ஆனால், (c கோசை θ, c சைன் θ) என்னும் புள்ளி $x^2 + y^2 = c^2$ என்னும் வட்டத்தின்மீது கிடக்கின்றது. ஆகவே, அவ்வட்டத்திற்கும் அந்நேர்கோட்டிற்கும் பொதுவாய் ஒரு புள்ளி இருக்கும்.

ஆகவே $ax + by = c^2$ என்னுங் கோட்டிற்கும் $x^2 + y^2 = c^2$ என்னும் வட்டத்திற்கும் ஒரு புள்ளியாயினும் பொதுவாயிருந்தாற்றான்,

$$a\ \text{கோசை}\ \theta + b\ \text{சைன்}\ \theta = c$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய பெறுமானங்கள் உண்டு. அக்கோட்டிலிருந்து அவ்வட்டமையத்தின் செங்குத்துத் தூரம் அவ்வட்டத்தின் ஆரையிலுஞ் சிறியதாயிருந்தால், அந் நேர்கோட்டிற்கும் அவ்வட்டத்திற்கும் இரண்டு வேறான புள்ளிகள் பொதுவாயிருக்கும். அச் செங்குத்துத் தூரம் ஆரைக்குச் சமனாயின் அவற்றிற்கு ஒரு புள்ளியே பொதுவாயிருக்கும். அச் செங்குத்துத்தூரம் ஆரையிலும் பெரிதாயின், ஒரு புள்ளியும் பொதுவாய் இராது. அக்கோட்டிலிருந்து மையத்தின் செங்குத்துத் தூரத்தின் வர்க்கம் $c^4/(a^2 + b^2)$ ஆகும். ஆகவே, $c^4/(a^2 + b^2) < c^2$ அல்லது $c^2 < a^2 + b^2$ ஆயின்,

$0 \leq \theta < 2\pi$ என்னும் வீச்சிற்குள்

$$a\ \text{கோசை}\ \theta + b\ \text{சைன்}\ \theta = c$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வினுடைய இரு பெறுமானங்கள் இருக்கும். $c^2 = a^2 + b^2$ ஆயின், $0 \leq \theta < 2\pi$ என்னும் வீச்சிற்குள் அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் ஒரு பெறுமானமே இருக்கும்.

$c^2 > a^2 + b^2$ ஆயின், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் ஒரு பெறுமானமும் இராது.

$c^2 < a^2 + b^2$ ஆயின், P, Q என்பன அவ்வட்டமுங் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளாகுக ; α, β என்பன x அச்சினுடைய நேர்த்திசையோடு OP, OQ என்பன ஆக்குங் கோணங்களாகுக.

ஆயின்,

$$a\ \text{கோசை}\ \theta + b\ \text{சைன்}\ \theta = c$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் எப்பெறுமானமும் $\alpha + 2n\pi$ அல்லது $\beta + 2n\pi$ என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

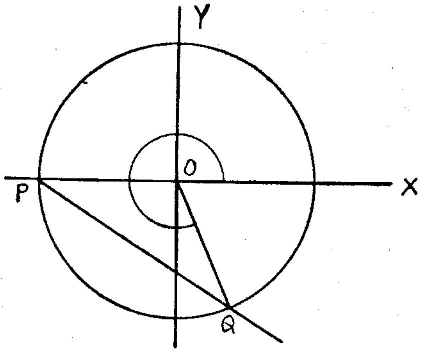
$c^2 = a^2 + b^2$ ஆயிருக்க, P என்பது அவ்வட்டத்தை அக்கோடு தொடும் புள்ளியாயின், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் எப்பெறுமானமும் $\alpha + 2n\pi$ என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும் ; இங்கு α என்பது x அச்சினுடைய நேர்த்திசையோடு OP ஆக்கிய கோணமாகும்.

$c^2 > a^2 + b^2$ ஆயின், அவ்வட்டமுங் கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டா ; அச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வும் இராது.

உதாரணம். **2கோசைθ+3சைன்$\theta = -2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை வரைபு முறையாலே தீர்க்க.**

அச்சமன்பாடு முதலாவதாக -2 கோசை$\theta - 3$ சைன்$\theta = 2$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படும்.

$x^2 + y^2 = 4$ என்னும் வட்டத்தையும் $-2x - 3y = 4$ என்னும் நேர் கோட்டையும் வரைக.



அவை P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டும். OX ஒடு OP ஆக்குங் கோணம் π யாகும் ; OX ஒடு OQ ஆக்குங் கோணம் $\pi + \alpha$ ஆகும் ; இங்கு α என்பது ஆரையனில் POQ என்னுங் கோணத்தின் பருமன்.

ஆகவே, பொதுத் தீர்வு $\theta = 2n\pi + \pi$ அல்லது $2n\pi + \pi + \alpha$ என்பதாலே தரப்படும்.

பயிற்சி 6.

1. 5 கோசை $\theta + 12$ சைன் $\theta = 6{\cdot}5$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை வகுத்தல் முறையாலே தீர்க்க ; உமது முடிபை வரைபு முறையால் வாய்ப்புப் பார்க்க.

√ 2. α, β என்பன 2π யின் மடங்கொன்றால் வேறுபடாத θ வினுடைய இரு பெறுமானங்களாய் a கோசை $\theta + b$ சைன் $\theta = c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பனவாயின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :—

(i) $a : b : c =$ கோசை $\frac{\alpha+\beta}{2}$: சைன் $\frac{\alpha+\beta}{2}$: கோசை $\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(ii) தான் $\frac{\alpha}{2}$ + தான் $\frac{\beta}{2} = \frac{2b}{c+a}$, $c + a \neq 0$ எனின் ;

(iii) தான் $\frac{\alpha}{2}$ தான் $\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$, $c + a \neq 0$ எனின் ;

(iv) கோசை α + கோசை $\beta = \frac{2ac}{a^2+b^2}$;

(v) சைன் α சைன் $\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2+b^2}$.

3. $b^2 - c^2 \neq 0$ ஆயின், a கோசை $\theta + b$ சைன் $\theta = c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் தான் θ வினுடைய பெறுமானங்களாலே தீர்க்கப்படும் இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

அதுகொண்டு, α, β என்பன 2π யின் மடங்கொன்றால் வேறுபடாத θ வினுடைய பெறுமானங்களாய் அச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பனவாயின்,

தான் α + தான் $\beta = \frac{2ab}{c^2 - b^2}$ என்றும், தான் α தான் $\beta = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}$ என்றுங் காட்டுக.

4. 2 கோசை θ + சைன் θ = கோசை 2θ − 2சைன் 2θ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ வின் எப்பெறுமானத்திற்கும் கோசை $\theta = 0$ அல்லது கோசை $3\theta = \frac{4}{5}$ எனக் காட்டுக.

√5. α என்பது தரப்பட $2ab$ சைன் $2\alpha \geqslant c^2 - a^2 - b^2$ ஆயிருற்றுன்,
a சைன் $(\theta + \alpha) + b$ கோசை$(\theta - \alpha) = c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் θ என்பது காணப்படலாமெனக் காட்டுக.

√ 6. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$$(2 + \text{கோசை } x) / (2 + \text{சைன் } x)$$

என்பதனுடைய உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

7. a கோசை $x + b$ சைன் $x = c$ என்னுஞ் சமன்பாடு கோசை x இற்கு இரண்டு பெறுமானங்களைத் தருமென்றும் இந்த இரண்டு பெறுமானங்களும்
a கோசை $x - b$ சைன் $x = c$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுலே தரப்படும் கோசை x இனுடைய இரு பெறுமானங்களுக்குஞ் சமமென்றுங் காட்டுக.

√ 8. $\frac{\text{கோசை } x + 2 \text{ சைன் } x + 1}{\text{கோசை } x + \text{சைன் } x}$ என்பது 1, 2 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும் ஒரு பெறுமானத்தையுங் கொள்ளாதெனக் காட்டுக.

9. 6 கோசை$^2 x$ + 8 சைன் x கோசை x = 8 என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

10. 4 (கோசை$^3 x$ − சைன்$^3 x$) + 3 (சைன் x − கோசை x) = 1 என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

குறித்த தொடர்கள் சிலவற்றின் கூட்டல்கள்.

உ-ம் 1. சைன் θ + சைன் $(\theta + \alpha)$ + சைன் $(\theta + 2\alpha) + \ldots\ldots +$ சைன் $(\theta + \overline{n-1}\alpha)$ என்னுந் தொடருடைய n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. இங்கு உறுப்புக்களிலுள்ள கோணங்கள் α என்னும் பொது வித்தியாசத்தோடு ஒரு கூட்டல் விருத்தியிற் கூடுகின்றன.

α என்பது 2π யின் ஒரு மடங்காயின், ஒவ்வோர் உறுப்பும் சைன் θ வாகி முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை n சைன் θ வாகும்.

α என்பது 2π யின் ஒரு மடங்கன்றெனின், சைன் $\frac{\alpha}{2} \neq 0.$

T_r என்பது அத்தொடரின் r ஆம் உறுப்பாகுக.

$$\therefore\ 2T_r\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = 2\ \text{சைன்}\ (\theta + \overline{r-1}\,\alpha)\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2}$$

$$= \text{கோசை}\left(\theta + \overline{r-\frac{3}{2}}\,\alpha\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \overline{r-\frac{1}{2}}\,\alpha\right)$$

$r = 1,\ 2, \ldots\ldots, n$ எனப் பிரதியிட,

$$2T_1\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = \text{கோசை}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$2T_2\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = \text{கோசை}\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right),$$

$$2T_3\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = \text{கோசை}\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \frac{5\alpha}{2}\right).$$

....

....

$$2T_n\text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = \text{கோசை}\left(\theta + \overline{n-\frac{3}{2}}\,\alpha\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \overline{n-\frac{1}{2}}\,\alpha\right).$$

ஒருங்கு கூட்ட,

$$2\ \text{சைன்}\frac{\alpha}{2}\ (T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n) = \text{கோசை}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \text{கோசை}\left(\theta + \overline{n-\frac{1}{2}}\,\alpha\right)$$

$$= 2\ \text{சைன்}\left(\theta + \overline{n-1}\,\frac{\alpha}{2}\right)\ \text{சைன்}\ \frac{n\alpha}{2}.$$

$$\therefore\ \text{வேண்டிய கூட்டுத்தொகை} = \frac{\text{சைன்}\left(\theta + \overline{n-1}\,\frac{\alpha}{2}\right)\ \text{சைன்}\ \frac{n\alpha}{2}}{\text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2}}.$$

உ-ம் 2. **கோசை θ + கோசை $(\theta+\alpha)$ + கோசை $(\theta+2\alpha)$ + ... + கோசை $(\theta+\overline{n-1}\,\alpha)$ என்னுந் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

α என்பது 2π யின் ஒரு மடங்காயின், ஒவ்வோருறுப்பும் கோசை α வாகும்; ஆயின் அத்தொடரின் மொத்தம் n கோசை α வாகும்.

α என்பது 2π யின் ஒரு மடங்கல்லாதிருக்க T_r என்பது r ஆம் உறுப்பெனின்,

$$2T_r\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2} = 2\ \text{கோசை}\ (\theta + \overline{r-1}\,\alpha)\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2}$$

$$= \text{சைன்}\left(\theta + \overline{r-\frac{1}{2}}\,\alpha\right) - \text{சைன்}\left(\theta + \overline{r-\frac{3}{2}}\,\alpha\right)$$

$$\therefore\ 2\ \text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2}\ (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) = \text{சைன்}\left(\theta + \overline{n-\frac{1}{2}}\,\alpha\right) - \text{சைன்}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\ \text{கோசை}\left(\theta + \frac{n-1}{2}\,\alpha\right)\ \text{சைன்}\ \frac{n\alpha}{2}.$$

$$\therefore\ \text{வேண்டிய கூட்டுத்தொகை} = \frac{\text{கோசை}\left(\theta + \frac{n-1}{2}\,\alpha\right)\ \text{சைன்}\ \frac{n\alpha}{2}}{\text{சைன்}\ \frac{\alpha}{2}}$$

விசேடமாக, $\alpha = 2\theta$ வாயின்,

$$\text{கோசை}\ \theta + \text{கோசை}\ 3\theta + \text{கோசை}\ 5\theta + \ldots + \text{கோசை}\ (2n-1)\theta$$

$$= \frac{\text{கோசை}\ n\theta\ \text{சைன்}\ n\theta}{\text{சைன்}\ \theta} = \frac{\text{சைன்}\ 2n\theta}{2\ \text{சைன்}\ \theta}.$$

$$\therefore\ \left|\frac{\text{சைன்}\ 2n\theta}{2\ \text{சைன்}\ \theta}\right| \leqslant \left|\text{கோசை}\ \theta\right| + \left|\text{கோசை}\ 3\theta\right| + \ldots + \left|\text{கோசை}\ 2\overline{n-1}\,\theta\right|;$$

இங்கு $|x|$ என்பது x இன் எண் பெறுமானத்தைக் குறிக்கின்றது.

$\therefore$ n இன் யாதுமொரு நேர் முழுவெண் பெறுமானத்திற்கு,

$$\left|\frac{\text{சைன்}\ 2n\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\right| \leqslant 2n.$$

அதாவது, m என்பது யாதும் ஓர் இரட்டை நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$\frac{\text{சைன்}\ m\theta}{\text{சைன்}\ \theta} \leqslant m.$$

$$\frac{\text{சைன்}\ (m+1)\,\theta}{\text{சைன்}\ \theta} = \frac{\text{சைன்}\ m\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\ \text{கோசை}\ \theta + \text{கோசை}\ m\theta.$$

$\therefore$ m என்பது இரட்டையாயின்,

$$\left|\frac{\text{சைன்}\ (m+1)\,\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\right| \leqslant \left|\frac{\text{சைன்}\ m\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\right|\ \left|\text{கோசை}\ \theta\right| + \left|\text{கோசை}\ m\theta\right|$$

$$\leqslant m+1.$$

அதாவது, p என்பது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணுயின்,

$$\left|\frac{\text{சைன்}\ p\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\right| \leqslant p.$$

$\therefore$ θ என்பது π யின் ஒரு மடங்கன்றெனின் n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்ணுயின்,

$$\left|\frac{\text{சைன்}\ n\theta}{\text{சைன்}\ \theta}\right| < n.$$

உ-ம். 3. தலைமைப் பெறுமானம் நேர்மாறு சார்புக்குக் கொடுபட்டிருக்க,

$$\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2.1^2}+\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2.2^2}+\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2.3^2}+\ldots+\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2.n^2}$$

என்னுந் தொடரினுடைய n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$T_r=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2.r^2}.$$

இப்பொழுது,

$$\frac{1}{2r^2}=\frac{\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}}{1+\frac{1}{2r-1}\cdot\frac{1}{2r+1}}.$$

$\alpha=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2r-1}$ ஆயும், $\beta=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2r+1}$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\text{தான்}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{தான்}\,\alpha-\text{தான்}\,\beta}{1+\text{தான்}\,\alpha\;\text{தான்}\,\beta}=\frac{\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}}{1+\frac{1}{2r-1}\cdot\frac{1}{2r+1}}$$

$$=\frac{1}{2r^2}.$$

$$\therefore\ \text{தான்}^{-1}\frac{1}{2r^2}=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2r-1}-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2r+1}.$$

$$\therefore\ T_1=\text{தான்}^{-1}1-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{3}.$$

$$T_2=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{3}-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{5}.$$

....

....

$$T_n=\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2n-1}-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2n+1}.$$

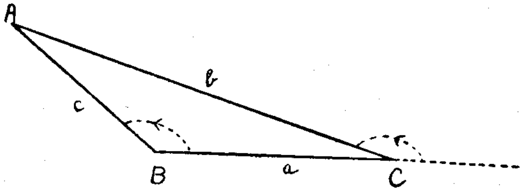
$$\therefore\ \text{வேண்டிய கூட்டுத்தொகை}=\text{தான்}^{-1}1-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2n+1}.$$

அத்தியாயம் 6

முக்கோணியின் இயல்புகள்.

ABC என்பது ஒரு முக்கோணியாகுக ; A, B, C என்பனவற்றிலுள்ள கோணங்களுடைய பருமன்கள் A, B, C என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படுக ; இக்கோணங்களுக்கு எதிராயுள்ள பக்கங்கள் a, b, c என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படுக.



BC யோடு BA ஆக்குங் கோணம் B யாகும் ; BC யோடு CA ஆக்குங் கோணம் $\pi-C$ யாகும்.

ஆகவே, BC யோடு $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குங் கோட்டின் மீது BA, CA என்பனவற்றின் எறியங்கள் c சைன் B, b சைன் $(\pi-C)$ ஆகும். அதே கோட்டின்மீது BC யின் எறியம் பூச்சியம்.

BA யின் எறியம் $=$ BC யின் எறியம் $+$ CA யின் எறியம்.

$$\therefore\ c\ \text{சைன்}\ B=b\ \text{சைன்}\ (\pi-c)=b\ \text{சைன்}\ c.$$

$$\therefore\ \frac{b}{\text{சைன்}\ B}=\frac{c}{\text{சைன்}\ C}.$$

அதுபோல,
$$\frac{b}{\text{சைன்}\ B}=\frac{a}{\text{சைன்}\ A}.$$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{a}}{\text{சைன்}\ \mathbf{A}}=\frac{\mathbf{b}}{\text{சைன்}\ \mathbf{B}}=\frac{\mathbf{c}}{\text{சைன்}\ \mathbf{C}}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இனி, BC யின்மீது BA யின் எறியம் c கோசை B,

BC யின்மீது CA யின் எறியம் b கோசை $(\pi-C)$.

BC யின்மீது BC யின் எறியம் a.

BA யின் எறியம் $=$ BC யின் எறியம் $+$ CA யின் எறியம்.

$$\therefore\ c\ \text{கோசை}\ B=a+b\ \text{கோசை}\ (\pi-C)=a-b\ \text{கோசை}\ C.$$

$$\therefore\ \mathbf{a}=\mathbf{b}\ \text{கோசை}\ \mathbf{C}+\mathbf{c}\ \text{கோசை}\ \mathbf{B}.$$

அதுபோல,
$$\left.\begin{aligned}b&=c\ \text{கோசை}\ A+a\ \text{கோசை}\ C.\\ c&=a\ \text{கோசை}\ B+b\ \text{கோசை}\ A.\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

இன்னும், $c^2 = c^2$கோசை$^2B + c^2$சைன்^2B

$= (a - b$ கோசை $C)^2 + b^2$சைன்^2C

$= a^2 - 2ab$கோசை$C + b^2$.

அதுபோல, $b^2 = c^2 - 2ac$கோசை$B + a^2$.

$a^2 = b^2 - 2bc$கோசை$A + c^2$. $\Bigg\}\ldots\ldots(3).$

$$\therefore \text{ கோசை } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{b^2+c^2-a^2}}{\mathbf{2\,bc}}.$$

$$\therefore\ 2 \text{ கோசை}^2\frac{A}{2} = 1 + \text{கோசை } A = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2\,bc}.$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2\,bc} = \frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{2\,bc}.$$

$a+b+c = 2s$ ஆகுக.

ஆயின், $b+c-a = 2s-2a$.

$$\therefore\ 2 \text{ கோசை}^2\frac{A}{2} = \frac{2s\ (s-a)}{bc}.$$

$0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ ஆகையால், கோசை $\frac{A}{2} > 0$

$$\therefore \text{ கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\left\{\frac{\mathbf{s(s-a)}}{\mathbf{bc}}\right\}}.$$

அதுபோல, கோசை $\frac{B}{2} = \sqrt{\left\{\frac{s(s-b)}{ca}\right\}}$.

கோசை $\frac{C}{2} = \sqrt{\left\{\frac{s(s-c)}{ab}\right\}}$.

இனி, 2 சைன்^{2} $\frac{A}{2} = 1 -$ கோசை $A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2\,bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2\,bc}$.

$$= 2\,\frac{(s-c)\ (s-b)}{bc}.$$

$$\therefore \text{ சைன் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\left\{\frac{\mathbf{(s-b)(s-c)}}{\mathbf{bc}}\right\}}.$$

அதுபோல, சைன் $\frac{B}{2} = \sqrt{\left\{\frac{(s-c)\,(s-a)}{ca}\right\}}$.

சைன் $\frac{C}{2} = \sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right\}}$.

$$\text{தான் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \frac{\text{சைன் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}}{\text{கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{\left\{\frac{\mathbf{(s-b)(s-c)}}{\mathbf{s(s-a)}}\right\}}.$$

$$\text{தான் } \frac{B}{2} = \sqrt{\left\{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\right\}},$$

$$\text{தான் } \frac{C}{2} = \sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right\}}.$$

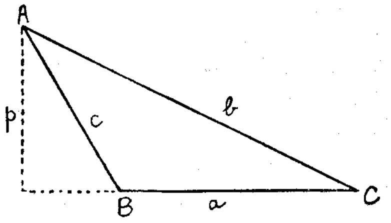
$$\text{சைன் } \mathbf{A} = 2 \text{ சைன் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} \text{ கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{bc}}\sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

$$\text{சைன் } B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{சைன் } C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

முக்கோணிப் பரப்பளவு.

p என்பது உச்சி A யிலிருந்து பக்கம் BC யிற்கு வரைந்த செங்குத்தினுடைய நீளமாயின், அம்முக்கோணியின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\,ap$ யாகும். BA என்பது BC யோடு B என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்றமையால், BC யோடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குங் கோட்டின்மீது BA யின் எறியம் c சைன் B யாகும்; அது p யிற்குச் சமனுகும்.



ஆகவே, முக்கோணியின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\,ac$ சைன் B யாகும்.

ஆனல், சைன் $B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

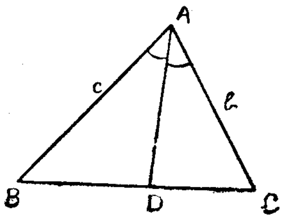
$\therefore$ பரப்பளவு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

இப்பரப்பளவை $\triangle$ என்பதாற் குறிக்கின்ரேம்.

$$\therefore\ \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

ஒரு கோணத்தின் இருகூறுக்கியினுடைய நீளம்.

கோணம் A யின் உள்ளிருகூறுக்கியானது BC யை D யிற் சந்திக்க.



ABC என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு ABD, ADC என்னும் முக்கோணிகளுடைய பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச்சமன்.

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}bc \text{ சைன் } A = \tfrac{1}{2}cAD \text{ சைன் } \frac{A}{2} + \tfrac{1}{2}bAD \text{ சைன் } \frac{A}{2}$$

$$\therefore\ 2bc \text{ சைன் } \frac{A}{2} \text{ கோசை } \frac{A}{2} = AD\ (c+b) \text{ சைன் } \frac{A}{2}.$$

சைன் $\frac{A}{2} \neq 0$ ஆயிருத்தலால்,

$$2bc \text{ கோசை } \frac{A}{2} = AD\ (b+c).$$

$$\therefore\ AD = \frac{2bc}{b+c} \text{ கோசை } \frac{A}{2}.$$

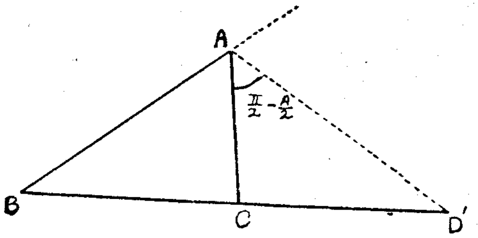
அதுபோல, B, C என்பனவற்றின் உள்ளிருகூறுக்கிகள் AC, AB என்பனவற்றை E, F என்பனவற்றிற் சந்தித்தால்,

$$BE = \frac{2ca}{c+a} \text{ கோசை } \frac{B}{2},$$

$$CF = \frac{2ab}{a+b} \text{ கோசை } \frac{C}{2}.$$

$c \neq b$ ஆயின், $c > b$ அல்லது $< b$ என்பதற்கேற்ப A என்னுங் கோணத்தின் வெளியிருகூறுக்கி நீட்டிய BC அல்லது CB என்பதைச் சந்திக்கும்.

$c > b$ ஆகுக ; அக்கூறுக்கி நீட்டிய BC யை D' இற் சந்திக்க.



கோணம் $CAD' = \dfrac{\pi - A}{2}$.

கோணம் $BAD' = A + \dfrac{\pi - A}{2} = \dfrac{\pi + A}{2}$.

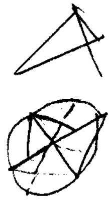
பரப்பளவு ABC = பரப்பளவு BAD' − பரப்பளவு CAD'

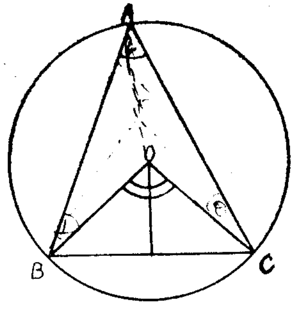
$$\therefore\ \tfrac{1}{2}bc \text{ சைன்} A = \tfrac{1}{2}c.AD' \text{ சைன்} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) - \tfrac{1}{2}b\ AD' \text{ சைன் } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(c-b)AD' \text{ கோசை } \frac{A}{2}.$$

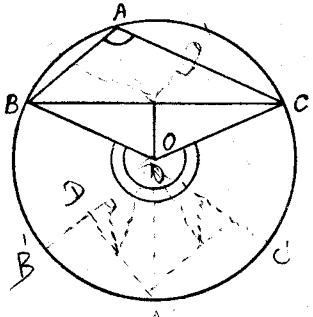
$$\therefore\ AD' = \frac{2bc \text{ சைன் } \frac{A}{2}}{c-b}.$$

சுற்றுவட்டத்தின் ஆரை.





படம் 1.



படம் 2.

R என்பது ABC என்னும் முக்கோணியின் சுற்றுவட்டவாரையாகுக. அம்முக்கோணியினுடைய எல்லாக் கோணங்களுங் கூர்ங்கோணங்களாயின், அதன் மையம் O என்பது அம்முக்கோணிக்குள்ளே கிடக்கும் ; அக் கோணங்களுள் ஒன்று விரிகோணமாயின், மையம் அம்முக்கோணிக்கு வெளியே கிடக்கும் படம் 1 இல் எல்லாக் கோணங்களுங் கூர்ங்கோணங் கள் ; படம் 2 இல் கோணம் A என்பது விரிகோணம். $\triangle BOC$ யின் கோணம் BOC படம் 1 இல் $2A$, படம் 2 இல் $2\pi - 2A$. O விலிருந்து BC யிற்கு வரைந்த செங்குத்து, பக்கம் BC யையும் கோணம் BOC யையும் இருகூறிடுகின்றது.

$$\therefore\ \frac{a}{2} = R \text{சைன் } A, \text{ படம் 1 இல்}$$

$$= R \text{ சைன் } (\pi - A), \text{ படம் 2 இல்.}$$

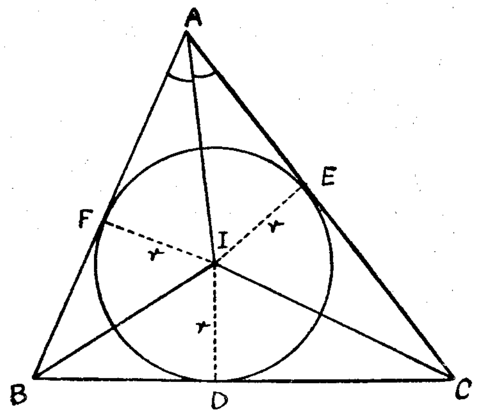
$$\therefore\ \frac{a}{2} = R \text{ சைன் } A, \text{ இரு வகைகளிலும்.}$$

அதுபோல, $\dfrac{b}{2} = R$ சைன் B, $\dfrac{c}{2} = R$ சைன் C.

$$\therefore\ R = \frac{a}{2\text{ சைன் } A} = \frac{b}{2\text{ சைன் } B} = \frac{c}{2\text{ சைன் } C}.$$

$\triangle = \frac{1}{2} bc$ சைன் A அல்லது சைன் $A = \frac{2\triangle}{bc}$.

ஆகையால் $$R = \frac{abc}{4\triangle}.$$



உள்வட்டத்தின் ஆரை.

I என்பது உள்வட்டத்தின் மையமாகுக ; D, E, F என்பன அம் முக்கோணிப் பக்கங்களினுடைய தொடு புள்ளிகளாகுக ; r என்பது அவ் வட்டவாரையாகுக.

பரப்பளவு ABC = பரப்பளவு BIC + பரப்பளவு CIA + பரப்பளவு AIB

$$\therefore\ \triangle = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = rs$$

$$\therefore\ \mathbf{r} = \frac{\triangle}{\mathbf{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

இனி, BD, BF என்பன வெளிப்புள்ளி B யிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளாதலால், $BD = BF$.

அதுபோல, $CD = CE$, $AE = AF$.

$$\therefore\ 2AE + 2CD + 2BD = 2s.$$

$$\therefore\ AE = s - (BD + DC) = s - a.$$

$$\frac{IE}{AE} = \text{தான் } \angle IAE = \text{தான் } \frac{A}{2}.$$

$$\therefore\ \mathbf{r} = (\mathbf{s} - \mathbf{a}) \text{ தான் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

அதுபோல, $r = (s-b)$ தான் $\frac{B}{2} = (s-c)$ தான் $\frac{C}{2}$.

இனி, $\frac{BD}{ID} =$ கோதா $\frac{B}{2}$, $\frac{CD}{ID} =$ கோதா $\frac{C}{2}$.

$$\therefore\ a = BD + DC = r\left(\text{கோதா } \frac{B}{2} + \text{கோதா } \frac{C}{2}\right)$$

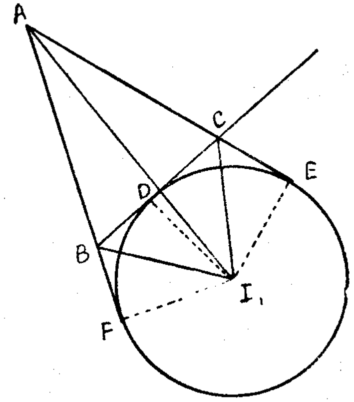
$$= \frac{r\left(\text{சைன் } \frac{C}{2} \text{ கோசை } \frac{B}{2} + \text{ கோசை } \frac{C}{2} \text{ சைன் } \frac{B}{2}\right)}{\text{சைன் } \frac{B}{2} \text{ சைன் } \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{r \text{ சைன் } \frac{B+C}{2}}{\text{சைன் } \frac{B}{2} \text{ கோசை } \frac{C}{2}} = \frac{r \text{ சைன் } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\text{சைன் } \frac{B}{2} \text{ சைன் } \frac{C}{2}} = \frac{r \text{ கோசை } \frac{A}{2}}{\text{சைன் } \frac{B}{2} \text{ சைன் } \frac{C}{2}}.$$

$$\therefore\ \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}}{\text{கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{2\ R} \text{ சைன் } \mathbf{A} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}}{\text{கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}}.$$

$$= \mathbf{4\ R} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}.$$

முக்கோணியின் வெளிவட்டங்கள்.



I_1 என்பது BC யை D யிலும் நீட்டிய AB, AC என்பனவற்றை F, E என்பனவற்றிலுந் தொடுகின்ற வட்டத்தின் மையமாகுக. r_1 என்பது அதன் ஆரையாகுக.

பரப்பளவு ABC = பரப்பளவு AI_1B + பரப்பளவு AI_1C − பரப்பளவு BI_1C.

$$\therefore\ \triangle = \tfrac{1}{2}r_1c + \tfrac{1}{2}r_1b - \tfrac{1}{2}r_1a.$$

$$= \frac{r_1}{2}(c + b - a) = r_1(s - a).$$

$$\therefore\ \mathbf{r}_1 = \frac{\triangle}{\mathbf{s} - \mathbf{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

இனி, $AE = AF$, $BD = BF$, $CD = CE$.

$$\therefore\ AE + AF = AB + BD + AC + CD = 2s.$$

$$\therefore\ AE = s.$$

$$\frac{EI_1}{AE} = \text{தான் } \angle EAI_1 = \text{தான் } \frac{A}{2}.$$

$$\therefore \ \mathbf{r_1 = s} \text{ தான் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

இனி, $a = BD + DC = r_1$ கோதா $I_1BD + r_1$ கோதா I_1CD

$$= r_1\left(\text{கோதா}\frac{\pi - B}{2} + \text{கோதா}\frac{\pi - C}{2}\right)$$

$$= r_1\left(\text{தான்}\frac{B}{2} + \text{தான்}\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{r_1 \text{ சைன் } \frac{B+C}{2}}{\text{கோசை}\frac{B}{2}\text{கோசை}\frac{C}{2}} = \frac{r_1 \text{ கோசை } \frac{A}{2}}{\text{கோசை}\frac{B}{2}\text{ கோசை}\frac{C}{2}}.$$

$$\therefore \ \mathbf{r_1} = \frac{\mathbf{2R} \text{ சைன் } \mathbf{A} \text{ கோசை } \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} \text{கோசை } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}}{\text{கோசை } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}}.$$

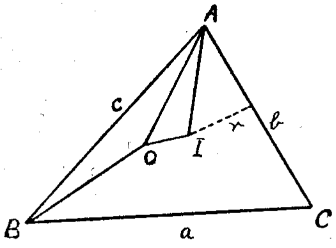
$$= \mathbf{4\ R} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}\text{கோசை}\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}\text{கோசை }\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

அதுபோல, r_2 என்பது CA யையும் நீட்டிய BA, BC என்பனவற்றையுந் தொடுகின்ற வட்டத்தின் ஆரையையும், r_3 என்பது AB யையும் நீட்டிய CA, CB என்பனவற்றையுந் தொடுகின்ற வட்டத்தின் ஆரையாயும் இருந்தால், $\mathbf{r_2} = \frac{\triangle}{\mathbf{s - b}} = \mathbf{s}$ தான் $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4\ R}$ கோசை $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}$சைன் $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}$கோசை $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}$,

$$\mathbf{r_3} = \frac{\triangle}{\mathbf{s - c}} = \mathbf{s} \text{ தான் } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} = \mathbf{4\ R} \text{ கோசை}\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} \text{ கோசை}\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} \text{ சைன் } \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}.$$

உள் மையத்திற்குஞ் சுற்று மையத்திற்கும் இடையிலுள்ள தூரம்

I என்பது $\triangle ABC$ யின் உள்வட்ட மையமாயும் O என்பது அதன் சுற்றுவட்ட மையமாயும் இருக்க.



முக்கோணியினுடைய கோணங்களுள் இரண்டாயினுங் கூர்ங்கோணங்களாதல் வேண்டும். C என்பது கூர்ங்கோண மெனக் கொள்க. ஆயின், $\triangle AOB$ யின் $\angle AOB$ என்பது $2C$ யிற்குச் சமன். O வென்பது முக்கோணிக்குள்ளே கிடந்தாலும் அன்றி வெளியே கிடந்தாலும் இது உண்மையாகும்.

ஆகவே, $OA = OB$ ஆயிருக்கின்றமையால், $\angle BAO = \frac{\pi}{2} - C$.

$$\angle BAI = \frac{A}{2}.$$

$$\therefore \ \frac{A}{2} > \frac{\pi}{2} - C \text{ அல்லது } < \frac{\pi}{2} - C \text{ என்பதற்கேற்ப,}$$

$$\angle OAI = \frac{A}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - C\right) \text{ அல்லது } \frac{\pi}{2} - C - \frac{A}{2}.$$

எவ்வகையிலும், கோசை $\angle OAI =$ கோசை $\left(\frac{\pi}{2} - C - \frac{A}{2}\right)$

$$= \text{கோசை}\left(\frac{A+B+C}{2} - C - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \text{கோசை}\frac{B-C}{2}$$

$$\therefore \ OI^2 = AI^2 + AO^2 - 2AI.AO \text{ கோசை}\frac{B-C}{2}.$$

AC யிலிருந்து I யின் செங்குத்துத் தூரம் $r = 4\,R$ சைன் $\frac{A}{2}$சைன் $\frac{B}{2}$சைன்$\frac{C}{2}$.

$$\therefore \ AI = \frac{r}{\text{சைன் } \frac{A}{2}} = R \text{ சைன் } \frac{B}{2}\text{சைன் }\frac{C}{2}.$$

$$\therefore \ OI^2 = 16\ R^2\text{சைன்}^2\frac{B}{2}\text{சைன்}^2\frac{C}{2} + R^2 - 8\ R^2\text{சைன் }\frac{B}{2}\text{சைன்}\frac{C}{2}\text{கோசை }\frac{B-C}{2}$$

$$= R^2 - 8\ R^2\text{சைன்}\frac{B}{2}\text{சைன்}\frac{C}{2}\left[\text{கோசை}\frac{B-C}{2} - 2\text{சைன் }\frac{B}{2}\text{சைன் }\frac{C}{2}\right]$$

$$= R^2 - 8\ R^2\text{சைன் }\frac{B}{2}\text{ சைன் }\frac{C}{2}\left[\text{கோசை }\frac{B}{2}\text{கோசை }\frac{C}{2} - \text{சைன்}\frac{B}{2}\text{ சைன் }\frac{C}{2}\right]$$

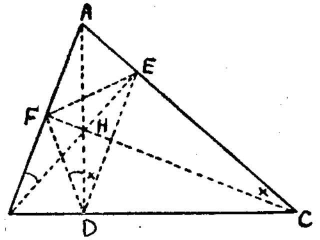
$$= R^2 - 8\ R^2\text{சைன் }\frac{B}{2}\text{ சைன் }\frac{C}{2}\text{ கோசை }\frac{B+C}{2}$$

$$= R^2 - 8\ R^2\text{சைன் }\frac{B}{2}\text{ சைன் }\frac{C}{2}\text{சைன் }\frac{A}{2}$$

$$= \mathbf{R^2 - 2\,Rr}.$$

நிமிர்மையம்.

ABC என்பது கோணங்கள் எல்லாங் கூர்ங்கோணமாயுள்ள ஒரு முக்கோணி யாகுக. உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படுஞ் செங்குத்துக்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் பொதுப்புள்ளியாகிய அம்முக்கோணியின் நிமிர்மையம் அம்முக்கோணிக்குள்ளே கிடக்கும். AD, BE, CF என்பன அச்செங்குத்துக்களாகுக, H என்பது அந் நிமிர்கோண மையமாகுக.



$$AE = AB \text{ கோசை } A = c \text{ கோசை } A$$

$$AH = \frac{AE}{\text{கோசை } \angle CAD} = \frac{c \text{ கோசை } A}{\text{கோசை}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} = \frac{c}{\text{சைன் } C}\text{கோசை } A$$

$$= \mathbf{2R} \textbf{ கோசை } \mathbf{A}$$

அதுபோல, $\mathbf{BH = 2R}$ **கோசை B**, $\mathbf{CH = 2R}$ **கோசை C.**

DEF என்னும் முக்கோணி **பாதமுக்கோணி** எனப்படும்.

B, C, E, F என்பன ஒருவட்டப் புள்ளிகளாதலால், AEF, ABC என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை.

$\therefore \ FE/BC = AE/AB$

ஆனல், $AE/AB =$ கோசை A.

$\therefore \ FE = BC$ கோசை $A = a$ கோசை A.

அதுபோல, $DF = b$ கோசை B, $DE = c$ கோசை C.

B, D, H, F என்பன ஒருவட்டப் புள்ளிகளாதலால்,

$$\angle FDH = FBE = \frac{\pi}{2} - A.$$

அதுபோல, $\angle HDE = \dfrac{\pi}{2} - A.$

$$\therefore \ \angle FDE = \frac{\pi}{2} - A.$$

$\therefore \ HD$ என்பது $\angle FDE$ என்பதை இருகூறிடுகின்றது.

அதுபோல, FH என்பது $\angle EFD$ என்பதை இருகூறிடுகின்றது.

$\therefore \ H$ என்பது $\triangle DEF$ இன் உள் மையம்.

DEF இன் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரை $\dfrac{EF}{2 \text{ சைன் } \angle FDE}$

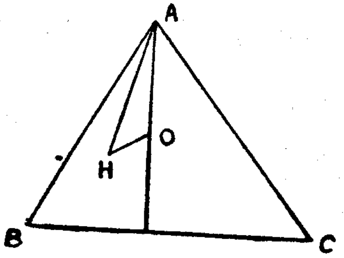
$$= \frac{a \text{ கோசை } 2A}{2 \text{ சைன் } (\pi - 2A)} = \frac{a \text{ கோசை } A}{2 \text{ சைன் } 2A} = \frac{a}{4 \text{ சைன் } A}$$

$$= \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}.$$

நிமிர்மையத்திற்கும் சுற்றுமையத்திற்கும் இடையிலுள்ள தூரம்.

ABC என்பது ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியாகுக.

O என்பது சுற்றுமையமாயின்.



$\angle OAB = \dfrac{\pi}{2} - C, \quad \angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - B.$

ஆகவே, B என்பது C யிலும் பெரிது அல்லது சிறிதாதற்கேற்ப,

$\angle OAH = B - C$ அல்லது $C - B$

எவ்வகையிலும்,

கோசை $\angle OAH =$ கோசை $(B - C)$

$$OH^2 = AH^2 + OA^2 - 2OA.AH \text{ கோசை } (B - C).$$

$$= 4R^2 \text{ கோசை}^2 A + R^2 - 4R^2 \text{ கோசை } A \text{ கோசை } (B - C)$$

$$= R^2 + 4R^2 \text{ கோசை } A \, [\text{கோசை } A - \text{கோசை } (B - C)]$$

$$= R^2 - 4R^2 \text{ கோசை } A \, [\text{கோசை } \overline{B + C} + \text{கோசை } \overline{B - C}]$$

$$= \mathbf{R^2 - 8R^2} \textbf{ கோசை } \mathbf{A} \textbf{ கோசை } \mathbf{B} \textbf{ கோசை } \mathbf{C}.$$

பயிற்சி 7

1. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில், $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc$ கோசை A $- 2ca$ கோசை B $- 2ab$ கோசை $C = 0$ என நிறுவுக.

✓2. ABC என்பது ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி. BC, CA, AB என்பனவற்றின்மீது அம் முக்கோணிக்கு வெளியே $BD = DC$ ஆகுமாறும் $CE = EA$ ஆகுமாறும் $AF = FB$ ஆகுமாறும் BDC, AEC, AFB என்னுஞ் செங்கோண முக்கோணிகள் வரையப்பட்டுள்ளன. FAE, FBD, DCE என்னும் முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$ எனக் காட்டுக.

3. $ABCD$ என்பது $AB = x$ ஆயும் $\angle DAC = \alpha$ வாயும், $\angle DBC = \beta > \alpha$ ஆயுமுள்ள ஓர் இணைகரம் ; அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{2x^2 (\text{கோதா } \alpha + \text{கோதா } \beta)}{4 + (\text{கோதா } \alpha - \text{கோதா } \beta)^2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

4. D என்பது $BD : DC = m : n$ ஆகும்படி $\triangle ABC$ யினது பக்கம் BC யிலுள்ள ஒரு புள்ளி. $\angle ADC = \theta$ வாயும், $\angle BAD = \alpha$ வாயும், $\angle DAC = \beta$ ஆயுமிருந்தால், $(m + n)$ கோதா $\theta = m$ கோதா $\alpha - n$ கோதா $\beta = n$ கோதா $B - m$ கோதா C எனக் காட்டுக.

5—R 11681 (1/66)

5. D என்பது ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கம் BC யின் மையமாயும் $\angle BAD = \alpha$ வாயும், $\angle CAD = \beta$ ஆயுமிருந்தால், c சைன் $\alpha = b$ சைன் β என்றும் தான் $\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{b-c}{b+c}$ தான் $\frac{A}{2}$ என்றுங் காட்டுக.

6. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியின் உள்வட்டம் BC, CA, AB என்பனவற்றை D, E, F என்பனவற்றிலே தொடுகின்றது. D யிற்கூடாகவும் அவ்வட்ட மையத்திற்கூடாகவுஞ் செல்கின்ற கோடு EF என்பதை G யிற் சந்தித்தால், AG என்பது ABC என்னும் முக்கோணியின் ஓர் இடையத்தின் நீளத்திற்குக் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

7. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில், தான் $\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{\{s(s-a)\}}}$ எனக் காட்டுக.

அதிலிருந்து தான் $\frac{A}{2}$ தான் $\frac{B}{2}$ தான் $\frac{C}{2} \leqslant \frac{R}{2s}$ என்பதைப் பெறுக.

8. $r = s$ தான் $\frac{A}{2}$ தான் $\frac{B}{2}$ தான் $\frac{C}{2}$ எனக் காட்டுக.

9. H என்பது ABC என்னும் ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியின் நிமிர்மையமாயின் AHB, BHC, CHA என்பனவற்றினுடைய சுற்று வட்டங்களுக்குச் சமவாரைகள் உண்டெனக் காட்டுக. அதனைத் துணை கொண்டு இவ்வட்டமையங்களால் ஆக்கப்படும் முக்கோணி ABC என்னும் முக்கோணிக்குச் சர்வசமனெனக் காட்டுக.

10. I என்பது உண்மையமாயும், I_1, I_2, I_3 என்பன A, B, C என்பனவற்றிற்கு மறையாயுள்ள வெளிமையங்களாயுமிருந்தால்,

$I_2I_3 = 4R$ கோசை $\frac{A}{2}$ என்றும் $I_1I_2I_3$ இன் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரை $2R$ என்றுங் காட்டுக.

11. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில்

$$\left(1+\frac{c}{b}\right) \text{ கோசை } \frac{B}{2} = \left(1+\frac{c}{a}\right) \text{ கோசை } \frac{A}{2}$$

ஆயின், A,B, என்னுங் கோணங்கள் சமனிலிகளாகாவெனக் காட்டுக. இதனைத் துணைகொண்டு, ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் சமமாயின், அம்முக்கோணி இரு சமபக்க முக்கோணியாகு மென்பதைப் பெறுக.

12. ABC என்பது $B > C$ ஆயுள்ள ஒரு முக்கோணியாயின், A, உள் மையம், சுற்றுமையம் என்பனவற்றைத் தன்னுடைய உச்சிகளாகவுள்ள ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு

$\frac{R^2}{2}$ {சைன் $(B-C)$ − சைன் B + சைன் C} எனக் காட்டுக.

13. D, E, F என்பன ABC என்னும் ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியின் உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்குத்துக்களின் அடிகளாயின், DEF என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$-\tfrac{1}{8}R^2 \text{ (சைன் } 4A + \text{சைன் } 4B + \text{சைன் } 4C) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

14. ஒரு முக்கோணியினுடைய சுற்றுவட்ட ஆரையும் ஒரு கூர்ங்கோணத்தின் எதிர்ப்பக்க நீளமுந் தரப்பட்டால் அம்முக்கோணியின் பரப்பளவும் உள்வட்ட ஆரையும், ஏனையிரண்டு பக்கங்களுஞ் சமமாகும் பொழுது, மிகப்பெரியனவாகுமெனக் காட்டுக.

15. DEF என்னும் ஒரு முக்கோணி ABC என்னும் ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணிக்கு EF, FD, DE என்பன A, B, C என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுமாறு சுற்றுருவமாக வரையப்பட்டது ; $\angle ECA = \angle EAC = \angle ABC$; $\angle FAB = \angle FBA = \angle ACB$. R என்பது

$\triangle ABC$ யின் சுற்றுரையாயின், BDC, CEA, AFB என்னும் முக்கோணிகளின் நிமிர் மையங்களால் ஆக்கப்படும் முக்கோணி ABC என்னும் முக்கோணிக்குச் சர்வசமனென்றும் C யிற்கும் AFB என்னும் முக்கோணியின் நிமிர்மையத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கம் $R^2 + 2ab$ கோசை C என்றும் நிறுவுக.

முக்கோணித் தீர்வுகள்.

ஒரு முக்கோணிக்கு அதனோடு கூடியனவாய் ஆறு மூலகங்கள் உண்டு; அவை அதனுடைய மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களுமாகும். இவற்றுட் குறித்த சில மூலகங்களானவை தரப்பட்டால், ஏனையவற்றைக் காணும் முறை அம்முக்கோணியினது தீர்வு எனப்படும்.

இரு பக்கங்களும் அமைகோணமுந் தரப்பட்ட வகை.

b, c, A என்பன தரப்பட்டனவெனக் கொள்க.

$\frac{b}{c} = \frac{\text{சைன் } B}{\text{சைன் } C}$ ஆதலால்,

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{சைன் } B - \text{சைன் } C}{\text{சைன் } B + \text{சைன் } C} = \frac{2 \text{ கோசை } \frac{B+C}{2} \text{ சைன் } \frac{B-C}{2}}{2 \text{ சைன் } \frac{B+C}{2} \text{ கோசை } \frac{B-C}{2}}$$

$$= \text{கோதா } \frac{B+C}{2} \text{ தான் } \frac{B-C}{2}$$

$$= \text{கோதா } \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \text{ தான் } \frac{B-C}{2}$$

$$= \text{தான் } \frac{A}{2} \text{ தான் } \frac{B-C}{2}.$$

$$\therefore \text{ தான் } \frac{\mathbf{B-C}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{b-c}}{\mathbf{b+c}} \text{ கோதா } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}.$$

$\frac{B-C}{2}$ என்பது $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடப்பதால், அது தனியாகத் துணியப்படும். அன்றியும் $B + C = \pi - A$.

ஆகவே, B, C என்பன தனித்தனி துணியப்படும்.

ஆயின், பக்கம் a என்பது

$$\frac{a}{\text{சைன் } A} = \frac{b}{\text{சைன் } B}$$

என்னுந் தொடர்பிலிருந்து துணியப்படும். இவ்வண்ணம், ஒரு முக்கோணியினுடைய இரு பக்கங்களும் அவற்றின் அமைகோணமுந் தரப்பட்டால், மீதிப் பக்கமுங் கோணங்களுந் தனித்தனி துணியப்படும்.

உ - ம். $b=10$ சமீ., $c=21$ சமீ., $A=59^\circ 15'$ ஆயின், a, B, C என்பனவற்றைக் காண்க.

$$\text{தான்}\,\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\,\text{கோதா}\,\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \text{தான்}\,\frac{C-B}{2}=\frac{c-b}{c+b}\,\text{கோதா}\,\frac{A}{2}$$

$$=\frac{21-10}{21+10}\,\text{கோதா}\ 29^\circ\ 37\tfrac{1}{2}'$$

$$=\frac{11}{31}\,\text{கோதா}\ 29^\circ\ 37\tfrac{1}{2}'.$$

$$\therefore\ \text{மட தான்}\,\frac{C-B}{2}=\text{மட}\ 11-\text{மட}\ 31+\text{மட கோதா}\ 29^\circ\ 37\tfrac{1}{2}'$$

$$=1\cdot0414-1\cdot4914-\bar{1}\cdot7548$$

$$=\bar{1}\cdot7952.$$

$$\therefore\ \frac{C-B}{2}=31^\circ58'$$

$$\therefore\ C-B=63^\circ56'.$$

$$C+B=180^\circ-59^\circ15'=120^\circ45'$$

$$\therefore\ C=92^\circ20'$$

$$\therefore\ B=28^\circ25'.$$

$$\frac{a}{\text{சைன்}59^\circ\ 15'}=\frac{10}{\text{சைன்}\ 28^\circ25'}$$

$$\therefore\ \text{மட}\ a=\text{மட}\ 10+\text{மட சைன்}\ 59^\circ15'-\text{மட சைன்}\ 28^\circ25'$$

$$=1+\bar{1}\cdot9342-\bar{1}\cdot6775$$

$$=1\cdot2567.$$

$$\therefore\ a=18\cdot06.$$

மூன்று பக்கமுந் தரப்பட்ட வகை.

a, b, c என்பன தரப்பட்டனவெனக் கொள்க.

ஆயின், $s=\frac{a+b+c}{2}$ என்பது துணியப்படும்.

$$\text{தான்}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ ஆகையால், A என்பது தனியாகத் துணியப்படும். அதுபோல B, C என்பனவுந் தனித்தனி துணியப்படும்.

உ-ம். $a=10$, $b=21$, $c=15$ ஆயின் A, B, C என்பனவற்றைக் காண்க.

$$s=\frac{10+21+15}{2}=23.$$

$$\therefore\ \text{தான்}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(23-21)(23-15)}{23(23-10)}}$$

$$\therefore\ \text{மட தான்}\,\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\text{மட}\ 2+\text{மட}\ 8-\text{மட}\ 23-\text{மட}\ 13)$$

$$=\tfrac{1}{2}\ (\cdot3110+\cdot9031-1\cdot3617-1\cdot1139).$$

$$=\bar{1}\cdot3642.$$

$$\therefore\ \frac{A}{2}=13^\circ\,01'.$$

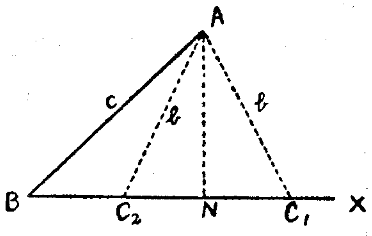
$$\therefore\ A=26^\circ\,02'.$$

அதுபோல B, C என்பனவற்றையுங் காணலாம்.

இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றுள் ஒன்றிற்கு எதிர்க்கோணமுந் தரப்பட்ட வகை.

b, c, B என்பன தரப்பட்டனவெனக் கொள்க.

அம்முக்கோணியின் கேத்திரகணித அமைப்பை ஆராய்க.

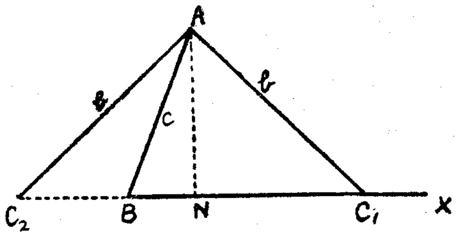


(i)

யாதுமொரு கோடு BX என்பதை வரைக; பின் BX ஒடு B என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்ற BA என்னுங் கோட்டை c யிற்குச் சமனாக வரைக. A என்னும் மையத்தையும் b என்னும் ஆரையையுமுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டம் BX இன் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியில் BX என்பதை வெட்டினாற்றான், தந்த தரவுகளுடன் ஒரு முக்கோணி வரையப்படலாம். ஆரையானது BX இலிருந்து A யினுடைய செங்குத்துத் தூரத்திலுஞ் சிறிதாயினால், அதாவது $b<c$ சைன் B ஆயினால், அவ் வட்டம் BX என்பதை அல்லது நீட்டிய XB என்பதை வெட்டாது. ஆகவே $b<c$ சைன் B ஆயின், ஒரு தீர்வும் இராது. ஆகவே, ஒரு தீர்வு இருத்தற்கு வேண்டிய ஒரு நிபந்தனை $b\geqslant c$ சைன் B யாகும்.

இந்நிபந்தனை தீர்க்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்க. B என்னுந் தந்த கோணம் கூர்ங்கோணமாயுள்ள வகையை முதலாவதாக ஆராய்வோம். N என்பது A யிலிருந்து BX இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடியாகுக. A என்னும் மையத்தையும் b என்னும் ஆரையையுமுடைய வட்டம், $b=c$ சைன் B ஆயின், BX என்பதை N இலே தொடும்.

$b > c$ சைன் B யாயின், அது N இலிருந்து சமதூரமான இரு புள்ளிகளில் BX என்பதை வெட்டும், படம் (i) ஐக் கவனிக்க. முதலாம் வகையில், ANB என்பதே வேண்டிய முக்கோணியாகும்; அத்தகை முக்கோணி ஒன்றுகவே இருக்கும். இரண்டாம் வகையில், N என்பது C_1, B என்பவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்படி அவ்வட்டமும் BX உம் வெட்டும் புள்ளி C_1 இற்கு ஒத்ததாய், என்றும் ஒரு தீர்வு இருக்கும். C_2 என்னும் மற்றை வெட்டுப் புள்ளியானது B, N என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால், இப்புள்ளியும் ஒரு தீர்வைத் தரும். ABC_1, ABC_2 என்னும் இரு முக்கோணிகளுந் தந்த நிபந்தனைகளைத் தீர்க்கும். AC_1C_2 என்னும் முக்கோணி இரு சமபக்க முக்கோணியாகும். ஆயின் $\angle AC_2C_1$ என்பது கூர்ங்கோணமாகும். ஆகவே, $\angle AC_2B$ என்பது விரிகோணமாகும். ஆதலால், அது $\angle ABC_2$ இலும் பெரிதாகும்.



(ii)

$\therefore\ AB > AC_2$, அதாவது $c > b$.

ஆகவே, இரு தீர்வுகள் வரக் கூடியனவாயின்,

$$c > b > c \text{ சைன் } B.$$

C_2 என்னும் வெட்டும் புள்ளி B, N என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்காதுவிடின், ABC_2 என்னும் முக்கோணிக்கு B என்னுந் தந்த கூர்ங்கோணம் இல்லை என்பதால், ஒரு தீர்வே வரக்கூடும். ABC_2 என்னும் முக்கோணியில், $\angle ABC_2$ என்பது விரிகோணம். ஆகவே, $AC_2 > AB$; அதாவது $b > c$. $b = c$ யாயின், C_2 என்பது B யோடு பொருந்தும்.

ஆகவே, B என்பது கூர்ங்கோணமாயிருக்கும்பொழுது $c > b > c$ சைன் B ஆயின், இரு தீர்வுகளும் $c \leq b$ அல்லது $b = c$ சைன் B ஆயின், ஒரு தீர்வே இருக்கும்.

இப்பொழுது, B என்னுந் தந்த கோணம் ஒரு செங்கோணமெனக் கொள்க. ஆயின், N என்பது B யோடு பொருந்தும்; $b > c$ ஆகும் பொழுதே ஒரு தீர்வு இருக்கக்கூடும். A என்பதை மையமாகவும் b என்பதை ஆரையாகவுங் கொண்ட வட்டம் BX என்பதை B யினுடைய எதிர்ப்பக்கங்களில் இரு புள்ளிகளில் வெட்டும்; இவ்விரு புள்ளிகளுக்கும் ஒத்த முக்கோணிகள் ஒன்றுகுமென்பது தெளிவு.

B என்னுங் கோணம் விரிகோணமாயின், $b > c$ ஆகும்பொழுதே ஒரு தீர்வு இருக்கும். A என்பதை மையமாகவும் b என்பதை ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் BX என்பதை B யினுடைய எதிர்ப்பக்கங்களில் வெட்டும்; அவ்வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்றே அனுமதிக்கப்படத்தக்கது.

C என்னுங் கோணம் சைன் $C = \dfrac{c \text{ சைன் } B}{b}$ என்னுந் தொடர்பிலிருந்து பெறப்படும்.

α என்பது சைன் $\alpha = \dfrac{c \text{ சைன் } B}{b}$ ஆகும்படியுள்ள நேர்க்கூர்ங்கோணமாயின் B என்பது கூர்ங்கோணமாயும் $c > b > c$ சைன் B ஆயுமிருக்கும் பொழுது பெறப்பட்ட C யினுடைய இரு பெறுமானங்களும் α, $\pi - \alpha$ என்பனவாகும். A யினுடைய ஒத்த பெறுமானங்கள் $A = \pi - (B+C)$ என்னுந் தொடர்பிலிருந்து பெறப்படும்; a யினுடைய ஒத்த பெறுமானங்கள் $a = \dfrac{b \text{ சைன் } A}{\text{சைன் } B}$ என்னுந் தொடர்பிலிருந்து பெறப்படும்.

பயிற்சி 8

1. b, c, B என்பன தரப்பட்ட பொழுது இரு முக்கோணிகள் பெறப்பட்டாற் பின்வருவன வற்றை நிறுவுக :

(i) அம்முக்கோணிகளினுடைய சுற்றளவுகளின் வித்தியாசம் $2d$ என்பது $2\sqrt{b^2 - c^2 \text{ சைன்}^2 B}$.

(ii) அம்முக்கோணிகளினுடைய சுற்று மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் d கோசீ B.

(iii) அம்முக்கோணிகளினுடைய உள் மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் d சீக $\dfrac{B}{2}$.

(iv) அம்முக்கோணிகளினுடைய நிமிர் மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் $2d$ கோதா B.

2. பின்வரும் நிபந்தனைகளில் $\triangle ABC$ யைத் தீர்க்க :—

(i) $a = 10$, $b = 6{\cdot}5$, $A = 31°$.

(ii) $a = 8$, $b = 6$, $c = 5$.

(iii) $a = 12$, $b = 10$, $A = 35°$.

(iv) $a = 9$, $b = 10$, $A = 28°$.

(v) $a = 14$, $b = 11$, $A = 148°$.

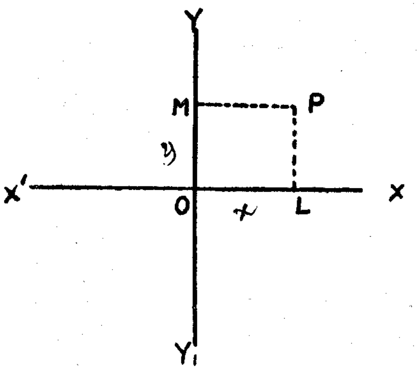
ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

அத்தியாயம் 1

ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

டெக்காட்டேயின் ஆள்கூறுகள்.

XOX', YOY' என்பன ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளி O வில் ஒன்றை ஒன்று வெட்டுகின்ற இரண்டு நிலையான நேர்க்கோடுகளாகுக. P என்பது அத்தளத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாகுக ; PL என்பது XX' என்பதை L இற் சந்திக்குமாறு YOY' இற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்படுக ; PM என்பது YY' என்பதை M இற் சந்திக்குமாறு XOX' இற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்படுக.



P யினது நிலை தரப்பட்டால், OL, OM என்னும் ஒத்த நீளங்கள் அறியப்படும். இந்நீளங்கள் XOX', YOY' என்னும் அச்சுக்களைக் குறித்து P என்னும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் எனப்படும் ; O என்பது உற்பத்தி எனப்படும். $OL = x$ ஆயும், $OM = y$ யாயுமிருந்தால், P யின் ஆள்கூறுகள் (x, y) எனப்படும் ; x என்பது கிடைக்கூறு என்றும், y என்பது நிலைக்கூறு என்றும் கூறப்படும். OL, OM என்னும் நீளங்களானவை தரப்பட்டால், O விலிருந்து $X'X$ இனது நீளத்திற்கு OL என்னும் ஒரு நீளத்தையும் $Y'Y$ யினது நீளத்திற்கு OM என்னும் ஒரு நீளத்தையும் அளந்து, L, M என்பனவற்றிற்கூடாக முறையே $Y'Y, X'X$ என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய்க் கோடுகள் வரைதலால், P யின் ஒத்த நிலை பெறப்படும். OL என்னும் நீளம் OX அல்லது OX' இனது திசையில் குறிக்கப்படலாம் என்பதாலும், OM என்னும் நீளம் OY அல்லது OY' இனது திசையில் குறிக்கப் படலாம் என்பதாலும், அத்தகைப் புள்ளி நான்கு பெறப்படலாமென எளிதிற் காணப்படும். அத்தளத்திலே தந்த ஒரு சோடி ஆள்கூறுகளுக்கு ஒத்ததாய் ஒரு புள்ளியே உண்டு எனச் சொல்லத்தக்கதாய் ஆள் கூறுகளை வரையறுத்தல் வசதியாகும். தந்த ஒரு கோட்டினது திசை யில் அதன்மீது தந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்படும் ஒரு நீளத்தின் குறிபற்றி ஒரு வழக்கை மேற்கொள்ளுவதால் இது செய்யப்படும். O விலிருந்து OX இனது திசையில் அளக்கப்படும் நீளங்களை நேர் என்றும் OX' இனது திசையில் அளக்கப்படுவனவற்றை மறை என்றுங் கொள்ள

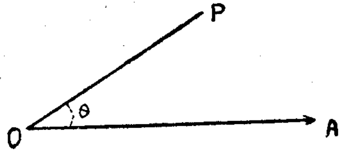
லாம் ; அதுபோல O விலிருந்து OY யினது திசையில் அளக்கப்படுவன வற்றை நேர் என்றும் OY' இனது திசையில் அளக்கப்படுவனவற்றை மறை என்றுங் கொள்ளலாம். இவ்வழக்கைக் கொள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள் கூறுகளானவை நேர் அல்லது மறையாகலாம். x, y என்னும் இரண்டும் நேராயின், அப்புள்ளி XOY என்னும் கோணத்தினுட் கிடக்கும் ; x நேராயும் y மறையாயுமிருந்தால் அப்புள்ளி XOY' என்னுங் கோணத்தி னுட் கிடக்கும் ; x மறையாயும் y நேராயுமிருந்தால் அப்புள்ளி YOX' என்னும் கோணத்தினுட் கிடக்கும் ; x, y என்னும் இரண்டும் மறையா யிருந்தால், அப்புள்ளி $X'OY'$ என்னும் கோணத்தினுட் கிடக்கும். உற்பத்தி O விற்கு (o,o) என்னும் ஆள்கூறுகள் உண்டு. $X'OX$ இன்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கு அல்லது x அச்சிற்குப் பூச்சியம் என்னும் நிலைக்கூறு உண்டு ; $Y'OY$ யின்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கு அல்லது y அச்சிற்குப் பூச்சியம் என்னுங் கிடைக்கூறு உண்டு. OX என்பது x அச்சினது நேர்த்திசை என்றும் OY என்பது y அச்சினது நேர்த்திசை என்றுங் கூறப்படும்.

ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் அச்சுக்கள் பற்றி இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x, y) என்பன அப் புள்ளியினுடைய டெக்காட்டேயின் ஆள்கூறுகள் எனப்படும். ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளி யினது நிலையைத் துணியும் இம் முறையை முதன்முதலாகத் டெக்காட்டே என்னும் புகழ்பெற்ற பிரான்சு தேயத்துக் கணிதவறிஞன் வழங்கியமை யால், இம்முறை அவர் பெயராற் கூறப்படுகின்றது. OX, OY என்னும் அச்சுக்கள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தாயின், அவ்வச்சுக்கள் செவ்வக வச்சுக்கள் எனப்படும் ; அவ்வாறில்லையெனின், அவை சரிவானவை எனப்படும். இங்கு செவ்வகவச்சுக்களையே கையாள்வோம். அத்தகை அச்சுக்கள்பற்றி, P என்னும் ஒரு புள்ளியின் கிடைக்கூறு OX இன்மீது OP யின் நிமிர்கோண எறியமாகும் ; அதனுடைய நிலைக்கூறு OY யின்மீது OP யின் நிமிர்கோண எறியமாகும்.

முனைவாள் கூறுகள்.

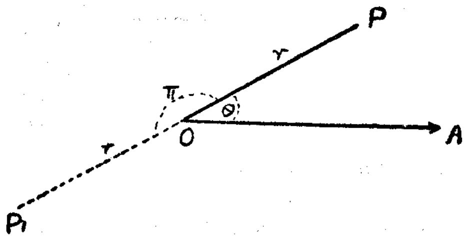
ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியினது நிலை வேறொரு விதத்தாலுந் துணியப் படலாம்.

ஒரு தளத்தில் O என்பது நிலையான ஒரு புள்ளியாயும், OA என்பது நிலையான ஒரு கோடாயுமிருக்க அத்தளத்தில், P என்பது ஒரு மாறும் புள்ளியாயிருக்க, OA யோடு OP ஆக்குங் கோணமும் O விலிருந்து P யினது தூரமும் அறியப்பட்டால், P யினது நிலை அறியப்படும். $OP = r$ ஆயும், OA யோடு OP ஆக்குங் கோணம் θ வாயு மிருந்தால், O என்பது முனைவாயும் OA என்பது ஆரம்பக் கோடாயுமிருக்க,



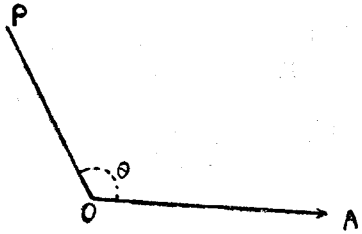
இவைபற்றிப் புள்ளி P யிற்கு (r, θ) என்னும் முனைவாள்கூறுகள் இருக் கின்றன என்று கூறப்படும். OP என்பது **ஆரைக்காவி** என்றும், θ என்பது **காவிக்கோணம்** என்றுங் கூறப்படும். OA யிலிருந்து OP யிற்குள்ள சுழற்சிப் போக்கு இடஞ்சுழி அல்லது வலஞ்சுழியாயிருத்தற்கேற்ப, θ என் பது நேர் அல்லது மறை எனக் கொள்ளப்படும். r என்பது நேரெனக் கொள்ளப்பட, $0 \leq \theta < 2\pi$ (அல்லது $-\pi < \theta \leq \pi$) ஆயின், வேறான இரு புள்ளிகளுக்கு ஒரே முனைவாள்கூற்றுத் தொகுதி (r,θ) இராது ; ஒரே புள்ளிக்கு இரண்டு ஆள்கூற்றுத் தொகுதிகள் இருத்தல் முடியாது. ஆனால், சிலவேளை களிற் குறித்த நோக்கங்களுக்காக r இன் குறிபற்றியும் ஒரு வழக்கை மேற் கொள்ளுதல் இசைவாகும்.

$r > 0$ வாயிருக்கும்பொழுது, P என்பது (r,θ) என்னும் புள்ளியாயிருக்க, PO என்பது $OP' = r$ ஆகும் வண்ணம் P' இற்கு நீட்டப்படின், P' என்னும் புள்ளிக்கு $(-r,\theta)$ என்னும் ஆள்கூறுகள் உண்டென்று கூறப்படும். ஆனால், இரு வேறு வேறான ஆள்கூற்றுத் தொகுதிகள் ஒரே புள்ளிக்கு ஒத்தனவாகுமென்பதால் இவ்வழக்கு அத்துணை நல்லதன்று ; $(-r,\theta)$ என்னும் புள்ளியும் $(r, \pi+\theta)$ என்னும் புள்ளியும் இவ்வழக்குப்பற்றி ஒன்றுதல் கண்கூடு.



டெக்காட்டேயின் செவ்வக ஆள்கூறுகளுக்கும் முனைவாள்கூறுகளுக் கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகள்.

O என்பது முனைவாயும் OA என்பது ஆரம்பக் கோடாயுமிருக்க, அவைபற்றி P என்னும் புள்ளிக்கு (r, θ) என்னும் முனைவாள்கூறுகள் இருக்க. ஆயின், OA யின்மீது OP யின் நிமிர்கோண எறியம் r கோசை θ ஆகும் ; OA ஓடு $+\frac{\pi}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் OB என்னுங் கோட்டின்மீது OP யின் நிமிர்கோண எறியம் r சைன் θ ஆகும்.

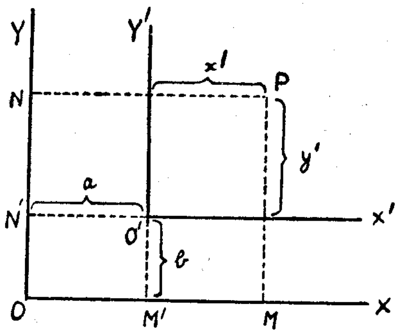


ஆகவே, OA, OB என்பன முறையே x, y என்பனவற்றின் அச்சுக்களாய் எடுக்கப்பட, P என்னும் புள்ளிக்கு இவ்வச்சுக்கள் பற்றி (x, y) என்னும் ஆள்கூறுகள் இருந்தால்,

$$x = r \text{ கோசை } \theta \text{ ஆயும் } y = r \text{ சைன் } \theta \text{ ஆயுமிருக்கும்.}$$

அச்சுமாற்றம்.

OX, OY என்பன இரு செவ்வகவச்சுக்களாகுக ; இவ்வச்சுக்கள் பற்றி O' என்னும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (a, b) ஆகுக ; இவ்வச்சுக்கள் பற்றி P என்னும் ஒரு மாறும் புள்ளியிலே ஆள் கூறுகள் (x, y) ஆகுக. PM, PN என்பன OX, OY என்பனவற்றை M, N என்பன வற்றிற் சந்திக்குமாறு முறையே YO, XO என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தர மாய் வரைந்தால், $OM = x$ ஆயும், $ON = y$ யாயுமிருக்கும். $O'M'$, $O'N'$ என்பனவற்றை YO, XO என்பன வற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் வரைந் தால் $OM' = a$ ஆயும், $ON' = b$ யுமி ருக்கும். $O'X'$, $O'Y'$ என்பன OX, OY என்பனவற்றிற்குச் சமாந் தரமாய் வரையப்படுக. $O'X'$,$O'Y'$ என்னும் அச்சுகள் பற்றி P யின் ஆள்கூறுகள் (x', y') ஆகுக. ஆயின், படத்திலிருந்து $x = x' + a$ என்பதும் $y = y' + b$ என்பதும் எளிதிற் காணப்படும். x, y, a, b என்பன எல்லாம் நேராகும்படி அப்படம் வரையப்பட்டபோதிலும் x, y, a, b, x', y' என்பனவற்றின் குறிகள் எவையாயிருப்பினும் மேலுள்ள தொடர்புகள் என்றும் உண்மை எனக் காட்டல் அரிதன்று.



இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்.

P_1, P_2 என்பன ஒரு தளத்தில் OX, OY என்னும் இரு செவ்வக அச்சுக்கள்பற்றி (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய இரு புள்ளிகளாகுக.

OP_2 இன் எறியம் $= OP_1$ இன் எறியம் $+ P_1P_2$ இன் எறியம் அதாவது, P_1P_2 இன் எறியம்$= OP_2$ இன் எறியம் $- OP_1$ இன் எறியம்.

$\therefore$ OX இன்மீது P_1P_2 இன் எறியம் $= x_2 - x_1$

OY யின்மீது, P_1P_2 இன் எறியம் $= y_2 - y_1$.

$\therefore$ $P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

விசேடமாக, $P = (x, y)$ ஆயின்,

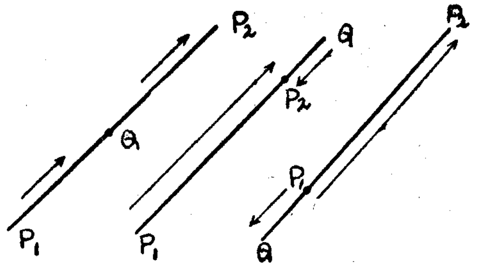
$$OP^2 = (x - o)^2 + (y - o)^2 = x^2 + y^2.$$

ஒரு நீளத்தைத் துண்டுகளாகப் பிரித்தல்.

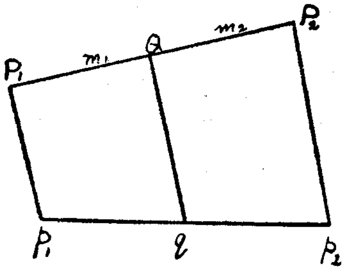
Q என்பது P_1, P_2 என்னும் இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்ற நேர் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. Q என்பது P_1P_2 என் பதை P_1Q, QP_2 என்னும் இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கின்றதெனப்படும்.

Q என்பது P_1, P_2 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால், P_1Q, QP_2 என்னும் நீளங்கள் ஒரு போக்கில் இருக்கும் ; ஆனால், Q என்பது நீட்டிய P_1P_2 அல்லது நீட்டிய P_2P_1 இல் இருந்தால், P_1Q, QP_2 என்பன ஒரே போக்கில் இரா.

தந்த ஒரு நேர் கோட்டினது திசையில் அளக்கப்பட்ட நீளங்களின் குறிகளுக்கு வழக்கமான வழக்கைப் பின்பற்றிக்கொண்டு, Q என்பது P_1, P_2 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்போது P_1Q/QP_2 என்னும் விகிதத்தை நேர் என்றும் Q என்பது P_1, P_2 என்பனவற்றிற்கு இடையில் கிடவாதிருக்கும்போது அவ்விகிதத்தை மறை என்றுங் கொள்ளுகின்றோம். P_1, P_2 என்பன நிலையாயிருக்க, Q என்பது P_1 இலிருந்து P_2 இற்கு P_1P_2 என்னுங் கோட்டினது திசையில் இயங்கும்பொழுது $\dfrac{P_1Q}{QP_2}$ என்னும் விகிதம் எல்லா நேர்ப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும். Q என்பது நீட்டிய P_2P_1 என்பதனு டைய திசையில் இயங்கும் பொழுது, அவ்விகிதம் -1, 0 என்பனவற்றிற்கு இடையில் எல்லா மறைப் பெறுமா னங்களையும் எடுக்கும். Q என்பது நீட்டிய P_1P_2 என்பத னுடைய திசையில் இயங் கும் பொழுது, அவ்விகிதம் -1 இலுஞ் சிறிய எல்லா மறைப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும். Q என்பது P_1 ஒடு பொருந்தினால், அவ்விகிதம் பூச்சியமாகும் ; ஆனால், Q என்பது P_2 ஒடு பொருந்தினால், P_1Q/QP_2 என்னும் விகிதத்திற்குப் பொருளில்லை. Q வினது யாதுமொரு நிலைக்கும் அவ்விகிதம் -1 என்னும் பெறுமானத்தை எடாது ; அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு : Q என்பது P_1P_2 இற்கு வெளியாற் கிடக்கும்போது P_1Q வின் பருமன் QP_2 இன் பருமனுக்குச் சமனாகாது. இவ்வண்ண மாக, $P_1Q/QP_2 = k$ ஆயின், k இனது -1 இற்குச் சமனாகாத யாது மொரு தந்த பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய், P_1, P_2 என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின்மீது Q என்னும் ஒரு புள்ளியே இருக்கும் அக்கோட்டின்மீது P_2 என்னும் புள்ளியைத் தவிர்ந்த ஒவ்வொரு புள்ளி யும் -1 இற்குச் சமனாகாத k யின் ஒரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் இருக்கும்.



m_1, m_2 என்பன இரண்டு நேர் மெய்யெண்களாய் அல்லது மறை மெய்யெண்களாயிருக்க, $P_1Q/QP_2 = \dfrac{m_1}{m_2}$ ஆகுக.



P_1, P_2, Q என்பனவற்றின் ஆள் கூறுகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆகுக. யாதுமொரு கோட்டை p_1, p_2, q என்பனவற்றிற் சந்திக்குமாறு, P_1, P_2, Q என்பனவற்றிற்கூடாக, சமாந்தரமான கோடுகள் வரையப்பட்டால் $\dfrac{p_1q}{qp_2} = \dfrac{P_1Q}{QP_2}$ என்பது தூய கேத்திர கணிதத்தினின்று பெறப்படும்.

P_1P_2 என்பது x அச்சிற்குச் செங்குத்தன்றெனின், அவ்வச்சின்மீது நிமிர்கோணமாக எறிவோமாறுல்,

$$\frac{P_1Q \text{ வின் எறியம்}}{QP_2 \text{ இன் எறியம்}} = \frac{P_1Q}{QP_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\therefore \frac{OQ \text{ வின் எறியம்} - OP_1 \text{ இன் எறியம்}}{OP_2 \text{ இன் எறியம்} - OQ \text{ வின் எறியம்}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

$$\therefore \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - \bar{x}} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\therefore \bar{x}(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

P_1P_2 என்பது x அச்சிற்குச் செங்குத்தெனின், $x_1 = x_2 = \bar{x}$; சூத்திரம் தெளிவாய் உண்மையாகும்.

அதுபோல், $\bar{y} = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$.

Q வின் யாதுமொரு நிலைக்கும் $\dfrac{m_1}{m_2}$ என்பது -1 இற்குச் சமனுகாதென்பது கவனிக்கப்படவேண்டும் ; ஆயின் $m_1 + m_2 = 0$ என்னும் வகை உண்டாகாது.

Q என்பது P_1P_2 இன் முக்கூறிட்ட புள்ளிகளுள் P_1 இற்கு அண்மையிலுள்ளதாயின் $m_1 = 1$ என்றும், $m_2 = 2$ என்றும் கொள்ளலாம் : ஆயின், Q வின் ஆள்கூறுகள்

$$\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right) \text{ ஆகும்.}$$

P_2 என்பது P_1Q வின் மையமாகும்படி Q என்பது நீட்டிய P_1P_2 இன்மீதுள்ள புள்ளியாயின், $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ அல்லது $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ என்று கொள்ளலாம் ; ஆயின் Q வின் ஆள்கூறுகள்

$$(2x_2 - x_1, \; 2y_2 - y_1) \text{ ஆகும்.}$$

$\dfrac{m_1}{m_2}$ என்னும் விகிதமேயன்றி m_1, m_2 என்பனவற்றினுடைய தனித் தனிப் பெறுமானங்கள் வேண்டியனவல்ல.

பயிற்சி 9

1. $(1, 1)$, $(-2, -3)$, $(-3, 4)$ என்னும் உச்சிகளையுடைய முக்கோணி செங்கோணமுள்ளதெனக் காட்டுக.

2. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்பன ஒரு முக்கோணியின் உச்சிகளாயின், அதன் இடையங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ என்பனவெனக் காட்டுக.}$$

3. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில், $CP = BC$, $AQ = CA$, $BR = AB$ ஆகும்படி BC, CA, AB என்பன முறையே P, Q, R என்பனவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. ABC என்னும் முக்கோணியின் மையப்போலி PQR என்னும் முக்கோணியின் மையப்போலியோடு ஒன்றுகுமெனக் காட்டுக.

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) என்பன ஒரொழுங்கில் எடுத்த ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளாயின், $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ என்றும் $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ என்றுங் காட்டுக.

5. $A \equiv (1, 2)$ ஆயும், $B \equiv (-3, -1)$ ஆயும், $C \equiv (-4, 14)$ ஆயுமிருந்தால், AB AC என்பனவற்றினுடைய நீளங்களையும் $\triangle ABC$ யின் கோணம் A யினுடைய உள்ளிருகூறுக்கியும் வெளியிருகூறுக்கியும் BC யைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையுங் காண்க.

6. $A \equiv (-1, 1)$, $B \equiv (1, 2)$, $P \equiv (x, y)$.

   (i) $AP^2 - BP^2 = 5$ ஆயின் $y + 2x = 4$ என்றும்,

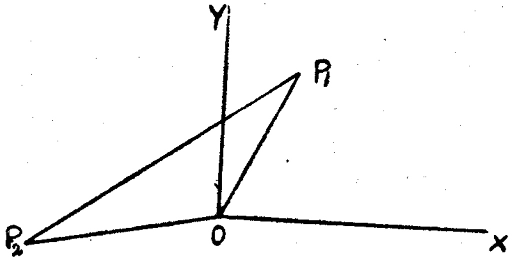
   (ii) $AP = 2BP$ ஆயின் $3x^2 + 3y^2 - 10x - 14y + 18 = 0$ என்றுங் காட்டுக.

7. $A \equiv (1, 0)$ ஆயும், $B \equiv (-1, 0)$ ஆயுமிருக்க, P என்பது $AP + BP = 4$ ஆகும்படியுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், P யின் ஆள்கூறுகள் $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமெனக் காட்டுக.

8. $A = (4, 0)$ ஆயும், $B = (-4, 0)$ ஆயுமிருக்க, P என்பது $AP - BP = 4$ ஆகும்படியுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், P யின் ஆள்கூறுகள் $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமெனக் காட்டுக.

முக்கோணிப் பரப்பளவு.

P_1, P_2 என்பன O என்னும் உற்பத்தியானது P_1, P_2 என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின்மீது கிடவாதவாறும், $OP_1\ P_2$ என்னும் முக்கோணியின் OP_1P_2O என்னுஞ் சுற்றின்வரைதற் போக்கு இடஞ்சுழியாயிருக்குமாறுமுள்ள இரு புள்ளிகளாகுக.



$P_1 \equiv (x_1, y_1)$ ஆகுக ; $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ஆகுக.

O வை முனைவாகவும் OX ஐ ஆரம்பக் கோடாகவுங் கொள்க, P_1 இன் முனைவாள்கூறுகள் (r_1, θ_1) ஆகுக ; இங்கு $r_1 > 0$. α என்பது அம்முக்கோணியின் கோணம் P_1OP_2 இன் பருமனாயின், P_2 இன் முனைவாள்கூறுகள், $r_2>0$ ஆயும் $\theta_2 \equiv \theta_1+\alpha$ ஆயுமிருக்கும் பொழுது, (r_2, θ_2) எனக் கொள்ளலாம்.

OP_1P_2 என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$= \tfrac12\, OP_1.OP_2 \text{ சைன் } P_1OP_2.$$
$$= \tfrac12\, r_1r_2 \text{ சைன் } \alpha = \tfrac12\, r_1r_2 \text{ சைன் } (\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \tfrac12\, r_1r_2 \,(\text{சைன் } \theta_2 \text{ கோசை } \theta_1 - \text{கோசை } \theta_2 \text{ சைன் } \theta_1)$$
$$= \tfrac12\, (r_1 \text{ கோசை } \theta_1\ r_2 \text{ சைன் } \theta_2 - r_2.\ \text{கோசை } \theta_2.\ r_1 \text{ சைன் } \theta_1).$$
$$= \tfrac12\, (x_1y_2 - x_2y_1).$$

$o < \alpha < \pi$ ஆயிருத்தலால், சைன் α என்பது நேர்.

OP_1P_2 என்பதன் போக்கு இடஞ்சுழியாயின், $x_1 y_2 - x_2y_1$ என்னுங் கோவை நேராகும். OP_1P_2 இன் போக்கு வலஞ்சுழியாயின், OP_2P_1 இன் போக்கு இடஞ்சுழியாகும். ஆகவே, முன்போல அதே நியாயத்தால், $x_2y_1 - x_1y_2$ என்னுங் கோவை நேராகும் ; அம் முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$\tfrac12(x_2y_1 - x_1y_2) = -\tfrac12(x_1y_2 - x_2y_1) \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, இருவகைகளிலும், அம்முக்கோணியின் பரப்பளவு $\frac12(x_1y_2 - x_2y_1)$ என்பதன் எண்பெறுமானமாகும்.

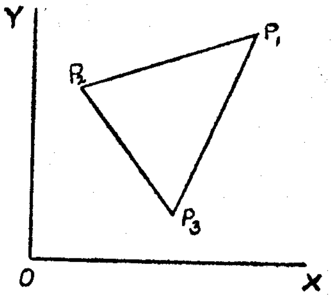
இன்னும், $x_1y_2 - x_2y_1$ என்பது நேர் அல்லது மறை என்பதற்கேற்ப OP_1P_2 இன் போக்கு இடஞ்சுழி அல்லது வலஞ்சுழியாகும்.

P_1, P_2, O என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருந்தால், $\alpha = 0$ அல்லது π ஆகும் ; ஆயின் r_1r_2 சைன் $(\theta_2 - \theta_1) = 0$; அதாவது $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

P_3 (x_3, y_3) என்பது $P_1P_2P_3$ இன் போக்கு இடஞ்சுழியாகும்படி P_1P_2 என்பவற்றோடு ஒரு கோட்டில் அமையாத வேறொரு புள்ளியாகுக.

P_3 இற்கூடாக OX, OY என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமான அச்சுக்களை எடுக்க. இவ்வச்சுக்கள் பற்றி P_1, P_2 என்பனவற்றினுடைய ஆள்கூறுகள்

$(x_1 - x_3,\ y_1 - y_3)$, $(x_2 - x_3,\ y_2 - y_3)$ என்பனவாகும்.



ஆகவே, $P_1P_2P_3$ என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$=\tfrac12\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\}$$
$$=\tfrac12(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

$P_1P_2P_3$ இன் போக்கு வலஞ்சுழியாயின், $P_2P_1P_3$ இன் போக்கு இடஞ்சுழியாகும் ;

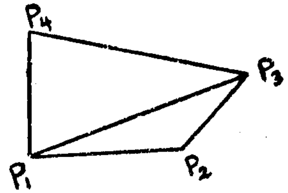
அம்முக்கோணியின் பரப்பு

$$= \tfrac12\{(x_2 - x_3)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_3)\},$$
$$= -\tfrac12(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

ஆகவே, இரு வகைகளிலும், அம்முக்கோணியின் பரப்பு.

$\frac12(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$ என்பதன் எண்பெறுமானமாகும்.

இன்னும் $x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3$ என்னுங் கோவை நேராய் அல்லது மறையாய் இருத்தலுக்கேற்ப $P_1\ P_2\ P_3$ இன் போக்கு இடஞ்சுழியாய் அல்லது வலஞ்சுழியாய் இருக்கும்.



P_1, P_2, P_3 என்பன ஒரு நேர் கோட்டில் இருந்தால்,

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0$$

ஒரு நாற்பக்கலின் பரப்பளவு அதனை இரு முக்கோணிகளாகப் பிரித்தலாற் பெறப்படலாம்.

$P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ என்பன ஒரொழுங்கில் எடுத்த உச்சிகளாயின், நாற்பக்கலின் பரப்பளவு

$$\tfrac12\ (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$$
$$+\ \tfrac12\ (x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4 + x_1y_3 - x_3y_1)$$
$$= \tfrac12\ (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4)$$

என்பதன் எண்பெறுமானமாகும்.

அத்தியாயம் 2

$f(x, y)$ என்பது x, y என்பனவற்றின் சார்பு அல்லது அவற்றுள் ஒன்றின் சார்பாயிருக்க, ஒரு மாறும் புள்ளி P என்பது தன்னுடைய ஆள் கூறுகள் $f(x, y) = 0$ என்னும் ஒரு குறித்த சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமாறு (x, y) தளத்திலே இயங்கினுல், P யின் ஒழுக்கின் சமன்பாடு $f(x, y) = 0$ எனப்படும்.

உதாரணமாக, P என்பது x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாய் இயங்கினுல் அதனுடைய நிலைக்கூறு என்றும் ஒரேயளவினதாகும்.

k என்பது (பூச்சியமல்லாத) ஒரு மாறிலியாயின், $y = k$ என்னுஞ் சமன்பாடு x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோடாகும்.

அதுபோல, $x = k$ என்னுஞ் சமன்பாடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$y = 0$, $x = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் x அச்சையும் y அச்சையும் முறையே குறிக்கும்.

ஒரு புள்ளியானது உற்பத்தித் தானத்திலிருந்து a என்னும் ஒரே தூரத்திலிருக்கும்படி இயங்கினுல், அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $x^2 + y^2 = a^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்.

உற்பத்தித் தானத்திலே மையமும் a யிற்குச் சமனுன ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாத ஒரு நேர்கோட்டின் சரிவு.

y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாத PQ என்னும் ஒரு கோடு x அச்சினது நேர்த்திசையோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல், அக்கோட்டின் சரிவு தான் θ என வரையறுக்கப்படும். PQ என்பது OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல், QP என்பது OX ஒடு $\theta + \pi$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்; ஆயின், QP யின் சரிவு = தான் $(\pi + \theta)$ = தான் θ. ஆகவே, ஒரு கோட்டின் சரிவு அதனுடைய திசை எடுக்கப்படும் போக்கைச் சாராது. அக்கோடு x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் பொழுது, அதன் சரிவு பூச்சியமாகும். அக்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நிலையை அணுகும் பொழுது அதன் சரிவின் எண்பெறுமானம் வரையறையின்றிப் பெரிதாக முயலும்; அக்கோடு உண்மையாக y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் பொழுது, சரிவு இருப்பதில்லை.

ஒரே சரிவுள்ள இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம்; y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாத இரு சமாந்தரமான கோடுகளுக்கு ஒரே சரிவு உண்டு.

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்பன x_1 உம் x_2 உஞ் சமனுகாதவண்ணமுள்ள இரு புள்ளிகளாயின், P_1P_2 இன் சரிவு

$$= \frac{OY \text{ யின் மீது } P_1P_2 \text{ இன் எறியம்}}{OX \text{ இன் மீது } P_1P_2 \text{ இன் எறியம்}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு.

x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டின்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கு மாரு நிலைக்கூறு இருக்கும்; ஆயின், b, c என்பன பூச்சியமல்லாத மாறிலிகளெனின், அக்கோட்டின் சமன்பாடு $by + c = 0$ என்னும் வடிவத்தைக் கொள்ளும். $c = 0$ ஆகும்பொழுது, அச்சமன்பாடு x அச்சையே குறிக்கும்.

a, c என்பன பூச்சியமல்லாத மாறிலிகளெனின், y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான யாதுமொரு கோடு $ax + c = 0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டாலே தரப்படும். $c = 0$ ஆயின், அச்சமன்பாடு y அச்சைக் குறிக்கும்.

இப்பொழுது, $ax + by + c = 0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டை எடுக்க; இங்கு, a, b என்பன பூச்சியமல்லாதவை எனக் கொள்க. (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்பன அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் x, y என்பனவற்றின் பெறுமானங்களின் இரு தொகுதிகளாகுக.

ஆயின்,
$$ax_1 + by_1 + c = 0, \; ax_2 + by_2 + c = 0;$$
$$\therefore \; a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

b என்பது பூச்சியமல்லாததாயிருக்கின்றமையால், $y_2 - y_1$ என்பது பூச்சியமாயினுற்ருன், $x_2 - x_1$ என்பது பூச்சியமாதல் கூடும். ஆகவே, x, y என்பனவற்றின் பெறுமானத் தொகுதிகள் இரண்டும் வேறுவேருயின்,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$$

ஆகவே, P_1P_2 என்பன $ax + by + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாற் குறிக்கப்படும் ஒழுக்கின்மீதுள்ள எவையேனும் இரு வேருன புள்ளிகளாயின், P_1, P_2 என்பனவற்றைத் தொடுக்குங் கோட்டின் சரிவு என்றும் ஒரேயளவினதாய் $-\frac{a}{b}$ யிற்குச் சமனுகும்.

ஆகவே, இவ்வொழுக்கு $-\frac{a}{b}$ என்பதைச் சரிவாயுள்ள ஒரு நேர்கோடாதல் வேண்டும்.

ஆகவே, $ax + by + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு என்றும் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

a, b என்னும் மாறிலிகளின் பெறுமானங்கள் எவையாயிருப்பினும், $c = 0$ ஆயின், அச்சமன்பாடு $x = 0$, $y = 0$ என்பனவற்ருலே தீர்க்கப்படும்.

ஆகவே, $ax+by=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுங் கோடு உற்பத்தித் தானத்திற் கூடாகச் செல்லும்.

$a=0$ ஆயின், அக்கோடு, x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் அல்லது அதனோடு பொருந்தும்.

$b=0$ ஆயின், அக்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் அல்லது அதனோடு பொருந்தும்.

$b\neq 0$ எனின், அக்கோட்டின் சரிவு $-\frac{a}{b}$ ஆகும்.

மறுதலையாக, யாதுமொரு நேர்கோடு $ax+by+c=0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டாற் குறிக்கப்படும். அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு : அக்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் அல்லது அதற்குச் சமாந்தரமாகாது. அது y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயின், அதன் சமன்பாடு $ax+c=0$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். அது y அச்சிற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், m என்பது அதன் சரிவாயும், (x_1, y_1) என்பன அதன்மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியின் ஆள்கூறுகளாயும் இருக்க, (x, y) என்பது அக்கோட்டின் மீதுள்ள வேறு யாதும் புள்ளியாயின்,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m,$$

அல்லது, $$y-mx-y_1+mx_1=0.$$

இதுவே அக்கோட்டின் சமன்பாடாகும். அது $ax+by+c=0$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ளது ; இங்கு, $a=-m$, $b=1$, $c=-y_1+mx_1$.

$a'=ak, b'=bk, c'=ck$ என்பன உண்மையாகுமாறு k என்னும் பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலி காணப்படலாமாதலின், $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ என்னும் இரு சமன்பாடுகள் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

தந்தவொரு சரிவோடு குறித்தவொரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுங்கோடு.

இதற்குமுன் மேலே காட்டியபடி, m என்னுஞ் சரிவோடு (x_1, y_1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m,$$

அல்லது $$y-y_1=m(x-x_1)$$ ஆகும்.

அது y அச்சின்மீது c என்னும் வெட்டுத்துண்டை ஆக்கினால், (o, c) என்னும் புள்ளி அதன்மீது கிடக்கும்.

ஆகவே, அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-c=mx,$$

அல்லது $$y=mx+c$$ ஆகும்.

இவ்வண்ணம், y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாத எக்கோடும் $y=mx+c$ என்னும் வடிவச் சமன்பாடொன்றாலே தரப்படும். ஆனால், y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு இவ்வடிவத்தில் இடப்படமுடியாது.

தந்த இருபுள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லுங் கோடு.

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்பன தந்த இருபுள்ளிகளாகுக. $x_1=x_2$ ஆயின், P_1P_2 என்னுங்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் ; k என்பது x_1, x_2 என்பனவற்றின் பொதுப் பெறுமானமாயின், அதன் சமன்பாடு $x=k$ ஆகும்.

$x_1\neq x_2$ எனின், அக்கோட்டின் சரிவு $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ஆகும். (x, y) என்பன அக்கோட்டின் மீதுள்ள வேறு யாதும் புள்ளியாயின், அக்கோட்டின் சரிவு $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ என்பதற்குச் சமனாகும்.

$$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

$$\therefore (y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$

அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x, y) என்பன இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமாதலால், அக்கோடு இச்சமன்பாட்டாற் குறிக்கப்படும்.

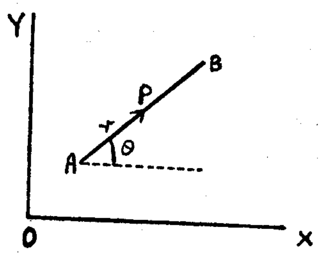
$x_1=x_2$ ஆகும்பொழுதும் இக்கூற்று உண்மையாகும். அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு : $x_1=x_2$ ஆகும்பொழுது, அச்சமன்பாடு $(x-x_1)(y_2-y_1)=0$ ஆகும். P_1, P_2 என்பன இரண்டு வேறான புள்ளிகளாயிருத்தலால், y_1-y_2 என்பது பூச்சியமன்று ; ஆயின், அச் சமன்பாடு $x-x_1=0$ ஆகும்.

உ-ம். $(-2, 0)$, $(-1, 2)$ என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லுங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y}{x+2}=\frac{2}{-1+2}$$ அல்லது $2x-y+4=0$ ஆகும்.

ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகளின் பரமான வகைக்குறிப்பு.

AB என்பது OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் ஒரு திசைக் கோடாகுக ; P என்பது A யிலிருந்து r என்னுந் தூரத்தில் அக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக ; AP என்பது AB யோடு ஒரு போக்காகுக. OX, OY என்பனவற்றின்மீது AP யின் எறியங்கள் rகோசைθ, r சைன்θ என்பனவாகும்.



$A_1 \equiv (x_1, y_1)$ ஆயும் $P \equiv (x, y)$ ஆயுமிருந்தால்,

$x - x_1 = r$ கோசை θ, $y - y_1 = r$ சைன் θ,

அல்லது $x = x_1 + r$ கோசை θ, $y = y_1 + r$ சைன் θ என்பன.

P என்பது A யிலிருந்து r என்னும் ஒரே தூரத்தில் இருக்க, AP என்பது AB யிற்கு எதிர்ப் போக்கில் இருந்தால், OX, OY என்பனவற்றின் மீது PA யினுடைய எறியங்கள் r கோசை θ, r சைன் θ என்பனவாகும்.

$\therefore$ $x_1 - x = r$ கோசை θ, $y_1 - y = r$ சைன் θ,

அல்லது $x = x_1 - r$ கோசை θ, $y = y_1 - r$ சைன் θ.

வழக்கமான வழக்கை மேற்கொண்டு A யிலிருந்து AB என்னுந் திசையில் அளக்கப்படுவனவற்றை நேர் என்றும் BA என்னுந் திசையில் அளக்கப்படுவனவற்றை மறையென்றுங்கொண்டால், A யிலிருந்து (நேர் அல்லது மறையான) r என்னுந் தூரத்தில் அக்கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி P யினுடைய ஆள்கூறுகள் $x_1 + r$ கோசை θ, $y_1 + r$ சைன் θ என்பனவாதல் பெறப்படும். r இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும், அக்கோட்டின்மீது ஒரு புள்ளியே உண்டு; அக்கோட்டின்மீதுள்ள எப்புள்ளிக்கும் ஒத்ததாய் r இற்கு ஒரு பெறுமானமே இருக்கும். r இன் ஒரு நேர்ப் பெறுமானத்திற்கு ஒத்த புள்ளி P என்பது OX ஓடு AP யானது θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்படி இருக்கும். r இன் ஓர் மறைப் பெறுமானத்திற்கு ஒத்த புள்ளி P என்பது OX ஓடு AP யானது $\pi + \theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்படி இருக்கும், x_1, y_1 உம் θ என்பதும் நிலையாயும் r என்பது மாறியாயுமிருக்க, அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி P யினுடைய ஆள்கூறுகள் இவ்வண்ணம் $x_1 + r$ கோசை θ, $y_1 + r$ சைன் θ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படும் பொழுது, அவ்வாள்கூறுகள் r என்னும் மாறும் பரமானத்தில் உணர்த்தப்பட்டன எனப்படும்.

ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ என்னும் வடிவத்திலே தரப்படுகின்றதெனக் கொள்க. அக்கோட்டின்மீது (x_1, y_1) என்னும் நிலையான ஒரு புள்ளியை எடுக்க.

ஆயின், $$ax_1 + by_1 + c = 0$$

ஆகவே, அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$ என எழுதப்படலாம்.

அக்கோடு OX இற்கு அல்லது OY யிற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், a, b என்பன பூச்சியமாகா.

ஆகவே, அச்சமன்பாட்டை

$$\frac{x - x_1}{b} = \frac{y - y_1}{-a}$$ என எழுதலாம்.

அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x, y) என்பன $\frac{x - x_1}{b}$ யும் $\frac{y - y_1}{-a}$ யுஞ் சமனாகும்படி இருக்கும்.

அவற்றின் பொதுப் பெறுமானத்தை t என்பதாற் குறிப்போமாயின்,

$$\frac{x - x_1}{b} = t, \qquad \frac{y - y_1}{-a} = t$$

அல்லது $x = x_1 + bt$, $y = y_1 - at$ என்பன.

அக்கோட்டின் மீது புள்ளி (x, y) இனது நிலைமாற, t இன் பெறுமானமும் மாறும் என்பது தெளிவு, அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கு ஒத்ததாய் t இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு; t இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் இக்கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளியே இருக்கும்.

இவ்வண்ணம், $x = x_1 + bt$, $y = y_1 - at$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகள் (x, y) என்பனவற்றின் பரமான வகைக் குறிப்பை t என்னுஞ் சாராமாறிபற்றித் தரும்.

அக்கோடு ஆள்கூற்றச்சுக்களுள் ஒன்றுக்குச் சமாந்தரமாயிருக்கும் பொழுதும் இச்சாராமாறிவகைக் குறிப்பு உண்மையாகும் என்பது இப்பொழுது எளிதிற் காணப்படும். அக்கோடு x அச்சிற்குச் சமாந்தரம் எனக் கொள்க. ஆயின், $a = 0$; அக்கோட்டின் சமன்பாடு $y = y_1$ என எழுதப்படலாம். பரமானச் சமன்பாடுகள் $x = x_1 + bt$, $y = y_1$ என்பனவாகும்; t இனுடைய வேறுவேறு பெறுமானங்களுக்கு இச்சமன்பாடுகள் $y = y_1$ என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைத் தெளிவாகத் தரும்.

அக்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயிருக்கும் பொழுது ஒத்த நியாயங்கள் உண்மையாகும்.

ஆகவே, $ax + by + c = 0$ என்பது யாதுமொரு தந்த கோட்டின் சமன்பாடாயிருக்க, (x_1, y_1) என்பது அதன்மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியாயின், அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $x = x_1 + bt$, $y = y_1 - at$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும்; இங்கு t என்பது ஒரு மாறும் பரமானம்.

உ-ம். $2x + 3y + 2 = 0$ என்னும் கோடும் $-\frac{3}{4}$ என்னுஞ் சரிவோடு $(1, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக வரைந்த கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(x,y) என்பது இரண்டாங் கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயின்,

$$\frac{y+1}{x-1} = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = t \quad (\text{என்க})$$

$$\therefore \quad x = 1+4t, \quad y = -1-3t.$$

இவ்வண்ணம் அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகள் t என்னும் மாறும் பரமானம் பற்றி உணர்த்தப்படும்.

T என்பது அவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கு ஒத்த t இன் பெறுமானமாயின்,

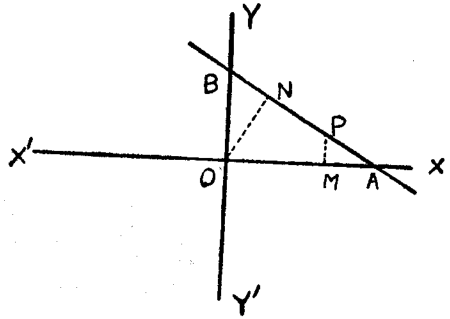
$x = 1+4T$, $y = -1-3T$ ஆகும்பொழுது $2x+3y+2=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தீர்க்கப்படும்.

$$\therefore \quad 2(1+4T)+3(-1-3T)+2=0.$$

$$\therefore \quad T=1.$$

ஆகவே, அக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(1+4, -1-3)$ அல்லது $(5,-4)$ என்பனவாகும்.

நியம வடிவம்.



AB என்பது தந்தவொரு கோடாகுக; N என்பது உற்பத்தித் தானம் O விலிருந்து அக்கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி ஆகுக; ON இன் நீளத்தின் பருமன் p ஆகுக. ON இனது திசை OX ஓடு α என்னுங் கோணத்தை ஆக்குக. அக்கோட்டின்மீது யாதுமொரு புள்ளி $P(x,y)$ என்பதை எடுக்க; PM என்பதை OX இற்குச் செங்குத்தாய் வரைக; அது OX என்பதை M இற் சந்திக்க, ஆயின், O விலிருந்து OX இனது திசையில் அளக்கப்படும் OM என்பது x இற்குச் சமன்; M இலிருந்து OY யிற்குச் சமாந்தரமான திசையில் அளக்கப்படும் MP என்பது y யிற்குச் சமன்.

ON இன் மீதுள்ள OP யின் எறியம் $=ON$ இன் மீதுள்ள OM இன் எறியம் $+ON$ இன் மீதுள்ள MP யின் எறியம்.

ON ஆனது OX ஓடு ஆக்குங் கோணம் α வாகும்; ஆகவே, OX ஆனது ON ஓடு ஆக்குங் கோணம் $-\alpha$ வாகும்.

ON ஆனது OY யோடு ஆக்குங் கோணம் $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ஆகும். ஆகவே OY யானது ON ஓடு ஆக்குங் கோணம் $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ஆகும்.

$\therefore$ ON இன்மீதுள்ள OP யின் எறியம்

$$= x \text{ கோசை } (-\alpha) + y \text{ கோசை } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ ஆனால்,}$$

ON இன்மீதுள்ள OP யின் எறியம் p யிற்குச் சமன்.

$$\therefore \quad x \text{ கோசை } \alpha + y \text{ சைன் } \alpha = p.$$

இச்சமன்பாடு அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளால் தீர்க்கப்படுமாகையால் அக்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

α என்னுங் கோணத்தின் பருமன் அல்லது குறி எதுவாயிருந்தாலும் இந் நியாயங்கள் பொருந்தும்.

N இனுடைய ஆள் கூறுகள் p கோசை α, p சைன் α என்பன.

நியம வடிவத்திற்கு மாற்றுதல்.

ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $ax+by+c=o$ என்னும் வடிவத்திலே தரப்பட்டபொழுது, அச்சமன்பாட்டை

$$\frac{ax}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{by}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = 0$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதுவதாலே நியம வடிவத்திற்கு மாற்றலாம். இங்கு $\sqrt{(a^2+b^2)}$ என்பது a^2+b^2 என்பதனுடைய நேர் வர்க்க மூலத்தைக் குறிக்கின்றது.

$c > 0$ ஆயின்,

$$\frac{-a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}x + \frac{-b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}y = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ என எழுதுகின்றோம்.}$$

$0 \leq \alpha < 2\pi$ என்னும் வீச்சிற்குள் கோசை $\alpha = \frac{-a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயும் சைன் $\alpha = \frac{-b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயுமிருக்கும்படி α விற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு.

ஆயின், அச்சமன்பாடு

x கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha = p$ யாகும்; இங்கு $p = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

$c < 0$ ஆயின்,

$$\frac{ax}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{by}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{-c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ என எழுதுகின்றோம்.}$$

கோசை $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயும், சைன் $\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயும்,

$p = \dfrac{-c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயுமிருந்தால், இச்சமன்பாடு

x கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha = p$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். அக்கோட்டிலிருந்து உற்பத்தியின் செங்குத்துத் தூரம்.

முதலாம் வகையில் $\dfrac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயும்,

இரண்டாம் வகையில் $-\dfrac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ஆயும் இருக்கும்.

$|c|$ என்பது c யின் எண் பெறுமானத்தைக் குறித்தால், அக்கோட்டிலிருந்து உற்பத்தித் தானத்தின் செங்குத்துத் தூரம் என்றும் $\dfrac{|c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ என்பதனாலேயே தரப்படும்.

உ-ம். $3x+4y+15=0$ என்னுங் கோட்டிலிருந்து உற்பத்தித் தானத்தின் செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க ; அக்கோட்டின்மீது உற்பத்தித் தானத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்தால் OX ஒடு ஆக்கப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$-\tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y = 3 \text{ ஆகும்.}$$

கோசை $\theta = \frac{3}{5}$ ஆயும், சைன் $\theta = \frac{4}{5}$ ஆயுமிருக்கும்படி, θ என்பது நேர்க் கூர்ங்கோணமாயின்,

கோசை $(\theta+\pi) = -\frac{3}{5}$, சைன் $(\theta+\pi) = -\frac{4}{5}$ என்பன.

ஆகவே, இக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x \text{ கோசை } (\theta+\pi) + y \text{ சைன் } (\theta+\pi) = 3 \text{ ஆகும்.}$$

N என்பது அக்கோட்டின்மீது O என்னும் உற்பத்தித் தானத்திலிருந்து வரைந்த செங்குத்தின் அடியாயின், ON இனது நீளம் $=3$; OX ஒடு ON ஆல் ஆக்கப்படுங் கோணம் $\theta+\pi$ ஆகும்.

N இன் ஆள்கூறுகள் ON கோசை $(\theta+\pi)$, ON சைன் $(\theta+\pi)$ அதாவது $(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5})$ என்பனவாகும்.

பயிற்சி 10

1. (i) OX ஒடு $\dfrac{\pi}{4}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கிக் கொண்டு $(1,-1)$ என்னும் புள்ளிக் கூடாகச் செல்கின்ற கோட்டின்,

(ii) $(2,3)$, $(-1,-2)$ என்னும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்கின்ற கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

2. (a கோசை α, b சைன் α), (a கோசை β, b சைன் β) என்னும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்கின்ற கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \text{ கோசை } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{y}{b} \text{ சைன் } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \text{கோசை} \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ எனக் காட்டுக.

3. λ என்பது ஒரு மாறுஞ் சாராமாறியாயின், (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாக செல்லுங் கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாமெனக் காட்டுக.

அது துணையாக $(-1,2)$, $(2,3)$ என்பனவற்றைத் தொடுக்குங் கோடு $x+y=0$ என்னுங் கோட்டாற் பிரிக்கப்படும் விகிதத்தைக் காண்க.

4. ஒரொழுங்கில் எடுத்த தன்னுடைய உச்சிகள் $(1,2)$, $(-1,3)$, $(2,4)$ $(2,-6)$ என்பனவாயுள்ள நாற்பக்கலின் பரப்பளவைக் காண்க.; மூலை விட்டங்கள் இரண்டும் உற்பத்தித் தானத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்றுங் காட்டுக.

5. a என்பது ஒரு நிலையான நேர்க் கணியமாயும் θ என்பது ஒரு மாறும் பரமானமாயுமிருந்தால், ஒரு மாறுங்கோடு x கோசை $\theta + y$ சைன் $\theta = a$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுகின்றது. அக்கோடு என்றும் ஒரு நிலையான வட்டத்தைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக ; a யிலும் பரமானம் θ விலும் அத்தொடு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. x கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha = a$, x சைன் $\alpha - y$ கோசை $\alpha = b$ என்னும் இரு நேர் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க ; அவை $x^2+y^2=a^2+b^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமென்றுங் காட்டுக.

7. $A \equiv (1,-1)$ ஆயும், $B \equiv (-2,3)$ ஆயுமிருக்க, P என்னும் ஒரு புள்ளி (x,y) தளத்தில் $\triangle APB$ என்பதன் பரப்பளவு 10 சதுர வலகுகளுக்கு சமனாகும்படி இயங்கினால், P யின் ஒழுக்கு இரு நேர் கோடுகளால் அமையுமெனக் காட்டுக ; அவ்விரு கோடுகளினுடைய சமன்பாடுகளைத் தனித்தனி காண்க.

8. ஒரு கோடு 1 என்னுஞ் சரிவோடு $A(3, 4)$ என்னும் புள்ளிக் கூடாக வரையப்படுகின்றது. அது $x^2+y^2=16$ என்னும் ஒழுக்கை P,Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டினால், AP, AQ என்பன OX ஒடு $\dfrac{5\pi}{4}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமென்றும் $AP+AQ=7\sqrt{2}$ என்றுங் காட்டுக.

9. A $(1,1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக வரைந்த ஒரு கோடு $2x^2+3y^2=6$ என்னும் ஒழுக்கை P,Q என்னும் இரு புள்ளிகளில் A யானது PQ வின் மையமாகும்படி வெட்டுகின்றது. அக்கோட்டின் சரிவு $-\frac{2}{3}$ எனக் காட்டுக.

10. A $(0,1)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து x அச்சை P யிற் சந்திக்குமாறு ஒரு நேர்கோடு OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தில் வரையப்படுகின்றது. $AP.\ AQ=4$ ஆக, AP யானது Q விற்கு நீட்டப்படுகின்றது. θ வில் Q வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க ; அது துணைகொண்டு θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் Q வின் ஒழுக்கு $x^2+(y+1)^2=4$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுமென்றுங் காட்டுக.

11. $a>0$ ஆயும் $0<\alpha<\pi$ ஆயுமிருக்க, $A \equiv (a,0)$ ஆயும் $P \equiv$ (a கோசை α, a சைன் α) ஆயுமுள்ளன. AP யானது OX ஒடு $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமெனக் காட்டுக. $AP.AQ=4a^2$ ஆகுமாறு AP யானது Q விற்கு நீட்டப்பட்டால், Q வானது $x+a=0$ என்னுங் கோட்டிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

12 OX, OY என்னுஞ் செவ்வக வச்சுக்கள் பற்றி ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $12x+5y+19=0$ ஆகும். $A(1, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக சமாந்தர வச்சுக்கள் பற்றி அதே கோட்டின் சமன்பாடு $12x+5y+26=0$ ஆகுமெனக் காட்டுக. அது துணைகொண்டு அக்கோட்டிலிருந்து A யின் செங்குத்துத் தூரத்தைப் பெறுக.

13. $x+2y+1=0$ என்னுங் கோட்டோடு $45°$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கிக் கொண்டு $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்ற நேர் கோடுகள் இரண்டினுடைய சமன்பாடுகளைக் காண்க ; அம்மூன்று கோடுகளாலும் ஆக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பளவையுங் காண்க.

14. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லுங் கோடு $x^2+y^2=1$ என்னும் ஒழுக்கை $PR/RQ=k$ ஆகுமாறு R என்னும் புள்ளியிற் சந்தித்தால்.

$k^2(x_2^2+y_2^2-1)+2k(x_1x_2+y_1y_2-1)+x_1^2+y_1^2-1=0$ எனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 3

சமாந்தர கோடுகள்

சமாந்தரமான இரு கோடுகளினுடைய சமன்பாடுகள் $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்பன எனக் கொள்க.

b_1, b_2 என்பன பூச்சியமல்லவெனின், அவற்றினுடைய சரிவுகள் $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$ என்பனவாகும். அக்கோடுகள் ஒரே போக்கில் எடுக்கப்படும் பொழுது, அவை OX ஒடு சமகோணங்களை ஆக்கும்.

$$\therefore\ -\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \text{ அல்லது } a_1b_2-a_2b_1=0$$

$b_1=0$ எனின், முதலாங்கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும். ஆயின், மற்றைக் கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாதல் வேண்டும். ஆகவே, b_2 என்பதும் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, இவ்வகையினும் $a_1b_2-a_2b_1=0$.

அதுபோல, $b_2=0$ எனின், $b_1=0$ ஆயும் $a_1b_2-a_2b_1=0$ ஆயும் இருக்கும்.

ஆகவே, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னும் எவையேனும் இரு கோடுகள் சமாந்தரமாயின்,

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

மறுதலையாக, $a_1b_2-a_2b_1=0$ ஆயின், $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னுங் கோடுகள் சமாந்தரமாகும். இது பின்வருமாறு நிறுவப்படும் :—

$b_1=0$ எனின், $a_1=0$ அல்லது $b_2=0$.

a_1, b_1 என்னும் இரண்டும் பூச்சியமாகும்பொழுது $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு பொருள்படாதாகையால், $a_1=0$ என்னும் வகை ஆராயப்படத் தேவையில்லை.

ஆகவே, $b_1=0$ ஆயின், $b_2=0$; அதுபோல் $b_2=0$ ஆயிருந்தால், $b_1=0$; அதாவது, அக்கோடுகளுள் ஒன்று y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயின், மற்றைக் கோடும் அதே அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் ; ஆகவே, அக் கோடுகள் சமாந்தரமாகும்.

b_1 என்பது பூச்சியமன்றெனின், b_2 என்பது பூச்சியமாகாது ; ஆயின்,

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}.$$

ஆகவே, அக்கோடுகளினுடைய சரிவுகள் சமமாகும் ; எனவே அக்கோடுகள் சமாந்தரமாகும்.

$a'x+b'y+c'=0$ என்னுங் கோடு $ax+by+c=0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகுக.

எனின், $ab'-a'b=0$ ....(1)

a', b' என்பனவற்றுள் ஒன்றுயினும் பூச்சியமன்று.

a' என்பது பூச்சியமன்றெனக் கொள்க. ஆயின், a என்பதும் பூச்சியமாகாது. $\frac{a'}{a}=k$ அல்லது $a'=ak$ ஆகுக.

(1) இற் பிரதியிட, $ab'-kab=0$.

$$\therefore \quad b'=bk.$$

ஆகவே, k என்பது பூச்சியமாகாமையால், $a'x+b'y+c'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $ax+by+\frac{c'}{k}=0$ என எழுதப்படலாம்.

ஆகவே, $ax+by+c=0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான எக் கோடும் $ax+by+\lambda=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் ; இங்கு λ என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராத ஒரு பரமானம்.

உ-ம். $3x-4y+6=0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் $(1, -2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

λ என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராத ஒன்றுயின், அச்சமன்பாடு $3x-4y+\lambda=0$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

அக்கோடு $(1, -2)$ என்பதற்கூடாகச் செல்கின்றமையால்,

$$3+8+\lambda=0.$$

$$\therefore \quad \lambda=-11$$

ஆகவே, அச்சமன்பாடு $3x-4y-11=0$ ஆகும்.

செங்குத்துக் கோடுகள்.

$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னுங் கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தெனக் கொள்க.

ஒரு கோடு ஆள்கூற்றச்சுக்களுள் ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமாயின், மற்றைக் கோடு மற்றையச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

ஆகவே, a_1, b_2 என்பனவற்றுள் ஒன்று பூச்சியமாயின், மற்றையதும் பூச்சியமாகும் ; a_2, b_1 என்பனவற்றுள் ஒன்று பூச்சியமாயின், மற்றையதும் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, அக்கோடுகளுள் ஒன்று ஆள்கூற்றச்சுக்களுள் ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமாயின்,

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

அவ்விருகோடுகளுள் ஒன்றுதல் ஆள்கூற்றச்சு ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், ஒவ்வொரு கோட்டிற்குஞ் சரிவு உண்டு ; அது பூச்சியமாகாது. θ என்பது OX ஒடு $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்னுங் கோட்டால் ஆக்கப்பட்டு ஒரு குறித்த போக்கில் எடுக்கப்பட்ட கோணமாகுக. ஆயின், $\theta+\frac{\pi}{2}$ என்பது OX ஒடு மற்றைக் கோட்டால் ஆக்கப்பட்டு ஒரு குறித்த போக்கில் எடுக்கப்பட்ட கோணமாகும்.

$$\therefore \text{ தான் } \theta=-\frac{a_1}{b_1}, \text{ தான் }\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{a_2}{b_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{a_1a_2}{b_1b_2}=\text{தான் }\theta\times\text{தான்}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\text{தான் }\theta\,(-\text{கோதா }\theta)=-1.$$

$$\therefore \quad a_1a_2+b_1b_2=0.$$

ஆகவே, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னும் எவையேனும் இரு கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தெனின்,

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

மறுதலையாக, $a_1a_2+b_1b_2=0$ எனின், $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னுங் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து. அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு :- $a_1=0$ ஆயின், $b_2=0$ ஆகும் ; $b_2=0$ ஆயின் $a_1=0$ ஆகும் ; அன்றியும் $a_2=0$ ஆயின், $b_1=0$ ஆகும் ; $b_1=0$ ஆயின், $a_2=0$ ஆகும். ஆகவே, ஒரு கோடு ஆள்கூற்றச்சு ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமாயின், மற்றைக் கோடு மற்றையச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் ; ஆயின், அக்கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகும்.

a_1, a_2, b_1, b_2 என்பன பூச்சியமல்லவெனின்,

$$-\frac{a_1}{b_1}=+\frac{b_2}{a_2}$$

ஆகவே, θ_1, θ_2 என்பன அவ்விரு நேர்கோடுகளால் OX ஒடு ஆக்கப்பட்ட கோணங்களாயின்,

$$\text{தான் }\theta_1=-\text{கோதா }\theta_2,$$

அல்லது கோசை θ_1 கோசை θ_2 + சைன் θ_1 சைன் $\theta_2=0$,

அல்லது கோசை $(\theta_1-\theta_2)=0$.

ஆகவே, θ_1, θ_2 என்பன $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கொன்றால் வேற்றுமைப் பட்டால், அவ்விரு நேர்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

6—R 11681 (1/66)

இரு கோடுகளுக்கு m_1, m_2 என்னுஞ் சரிவுகள் இருந்தால், அவ்விரு நேர் கோடுகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை $m_1m_2 = -1$ என்பதே.

$a'x + b'y + c' = 0$, $ax + by + c = 0$ என்னுங் கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகுக. ஆயின், $aa' + bb' = 0$. a', b' என்பன வற்றுள் ஒன்றுதல் பூச்சியமல்லாததாகும். a' என்பது பூச்சியமன்றெனக் கொள்க. ஆயின், a, b என்பனவற்றுள் ஒன்றுதல் பூச்சியமாகாதென் பதால் b என்பது பூச்சியமன்று. $\frac{a'}{b} = k$ அல்லது $a' = bk$ ஆகுக.

ஆகவே, $aa' + bb' = 0$ ஆயிருக்கின்றமையால்,

$$abk + bb' = 0$$

$$\therefore \quad b' = -ak$$

ஆகவே, $a'x + b'y + c' = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு

$$bx - ay + \frac{c'}{k} = 0$$

என எழுதப்படலாம்.

ஆகவே, λ என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராவெனின்,

$$ax + by + c = 0$$

என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான எக்கோடும்

$$bx - ay + \lambda = 0$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

உ-ம். $3x + 4y + 5 = 0$

என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் $(-2, 3)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அச்சமன்பாடு

$$4x - 3y + \lambda = 0$$

என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். அக்கோடு $(-2, 3)$ என்பதற்கூடாகச் செல்கின்றமையால்,

$$-8 - 9 + \lambda = 0.$$

$$\therefore \quad \lambda = 17.$$

ஆகவே, வேண்டிய சமன்பாடு

$$4x - 3y + 17 = 0.$$

இருகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

என்பன ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமல்லாதனவாயுஞ் செங்குத்தல்லாதனவாயுமுள்ள இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக.

அவ்விருகோடுகளுள் ஒன்றுதல் y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாத போதுள்ள வகையை முதலாவதாக ஆராய்வோம். OX ஒடு o, π என்பனவற்றிற்கிடையில் (π அன்றி o உட்பட) கிடக்கின்ற கோணங்களை ஆக்குங் கோடுகளினுடைய திசைகளைத் தேர்ந்தெடுக்க.

θ_1, θ_2 என்பன அவ்விருகோடுகளால் ஆக்கப்படும் கோணங்களாகுக. ஒரு கோணத்தின் குறியையன்றி அதன்பருமனையே காரியமெனக் கொள்ளும் பொழுது, அக்கோடுகளுக்கிடையில் ஒன்று கூர்ங்கோணமாயும் ஒன்று விரிகோணமாயுமுள்ள இரு கோணங்களிருக்கும் ; இக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை π ஆகும். தான் $(\pi - \alpha) = -$ தான் α வாயிருக்கின்றமையால், α, β என்பன அக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள இருகோணங்களாயின், தான் $\alpha = -$ தான் β என்பது பெறப்படும். $\theta_1 > \theta_2$ அல்லது $< \theta_2$ என்பதற்கேற்ப, அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்று $\theta_1 - \theta_2$ அல்லது $\theta_2 - \theta_1$ ஆகும்.

$$\text{தான் } (\theta_2 - \theta_1) = -\text{தான் } (\theta_1 - \theta_2)$$

ஆயிருக்கின்றமையால், எல்லாவகைகளிலும் அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணமொன்றின் தான்சன், தான்$(\theta_1 - \theta_2)$ ஆகுமென்பது பெறப்படும்.

$$\text{தான் } \theta_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \; \text{தான் } \theta_2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

$$\therefore \text{ தான் } (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\text{தான் } \theta_1 - \text{தான் } \theta_2}{1 + \text{தான் } \theta_1 \text{தான் } \theta_2} = \frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}},$$

$$= \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

ஆகவே, α என்பது அக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கூர்ங்கோணமாயின்

$$\text{தான் } \alpha = \left| \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} \right| ;$$

இது $\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$ இன் எண் பெறுமானத்தைக் காட்டுகின்றது.

இப்பொழுது, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

என்னுங் கோடு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமெனக் கொள்க.

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

என்னுங்கோடு OX ஒடு θ_2 என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்றமையால், OY யோடு அது ஆக்குங் கோணத்தின் பருமன் $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$ அல்லது $< \frac{\pi}{2}$ என்பதற்கேற்ப $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta_2$ ஆகும்.

ஆகவே, அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்றினது தான்சன்,

$$\text{தான்}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \text{கோதா } \theta_2 = -\frac{b_2}{a_2}$$

ஆகவே, α என்பது அக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கூர்ங்கோணமாயின்

$$\text{தான் } \alpha = \left|\frac{b_2}{a_2}\right|.$$

முன்னர் ஆராய்ந்த வகையில், தான் α விற்கு அக்கோவையில் $b_1 = 0$ என இட,

$$\left|\frac{-a_1 b_2}{a_1 a_2}\right| = \left|\frac{b_2}{a_2}\right| \quad a_1 \text{ என்பது பூச்சியமாகாமையால்.}$$

ஆகவே, $b_1 = 0$ ஆகும் பொழுதும்

$$\text{தான் } \alpha = \left|\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right|$$

என்னுஞ் சூத்திரம் உண்மையாகும். அதுபோல, $b_2 = 0$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மையாகும்.

m_1, m_2 என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயாதல், சமாந்தரமாயாதல் இல்லாத இருகோடுகளின் சரிவுகளாயின், அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணம் α என்பது

$$\text{தான் } \alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

என்பதாலே தரப்படும்.

உ–ம். $2x + 3y = 0$, $2x - y = 0$ என்னுங் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கூர்ங் கோணம் $\frac{4}{\pi}$ இலும் பெரிதெனக் காட்டுக.

α என்பது கூர்ங்கோணமாயின்,

$$\text{தான் } \alpha = \left|\frac{6+2}{4-3}\right| = 8.$$

$$\therefore \text{ தான் } \alpha > \text{தான் } \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha > \frac{\pi}{4}.$$

இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுங் கோடுகள்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

என்பன இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக. அக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டினுல், அவ்வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் அச்சமன்பாடுகள் இரண்டையுந் தீர்க்கும் x, y என்பனவற்றின் பெறுமானங்களாகும்.

$a_1 b_2 - a_2 b_1$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், அச்சமன்பாடுகள் இரண்டையுந் தீர்த்தற்கு x, y என்பனவற்றின் ஒரு தனிப் பெறுமானத் தொகுதி காணப்படலாம். $a_1 b_2 - a_2 b_1$, என்பது பூச்சியமெனின்,

x, y என்பனவற்றின் பெறுமானங்கள் அச்சமன்பாடுகள் இரண்டையும் ஒருங்குதீர்த்தல் காணப்படாது ; அக்கோடுகள் சமாந்தரமாகும்.

λ என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராதிருக்க,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை ஆராய்க. அது x, y என்பனவற்றிலே முதலாம் படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு. ஆகவே, அது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

தந்த இரு கோடுகளுஞ் சமாந்தரமல்ல எனக் கொள்க. ஆயின், அவை (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும். இப்புள்ளி அக்கோடுகள் இரண்டிலுங் கிடக்கின்றமையால்,

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \quad a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0$$

$\therefore$ λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 + \lambda(a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2) = 0.$$

ஆகவே, (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி,

$$(a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

என்னுங் கோட்டிற் கிடக்கும்.

$\therefore$ λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ என்னுங் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

என்னும் கோடுகள் சமாந்தரம் எனக் கொள்க.

ஆயின், $\quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$

∴ λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்,

$$a_1(b_1+\lambda b_2) - b_1(a_1+\lambda a_2) = \lambda(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

$$\therefore \quad (a_1+\lambda a_2)x + (b_1+\lambda b_2)y + (c_1+\lambda c_2) = 0$$

என்னுங் கோடானது λ இன் பெறுமானம் எதுவாயிருந்தாலும் $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

∴ λ இன் பெறுமானம் எதுவாயிருந்தாலும்,

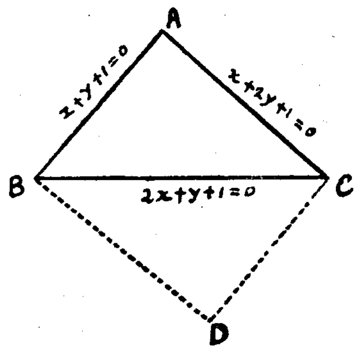
$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடு

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

என்னுஞ் சமாந்தரமான கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டைக் குறிக்கும்.

உ-ம். ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $x+y+1=0$, $x+2y+1=0$, $2x+y+1=0$ என்பன. அம்முக்கோணியின் நிமிர் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் அம்முக்கோணியின் மூன்றும் பக்கத்தை இருகூறிடும் இடையத்தின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.



$x+y+1+\lambda(x+2y+1)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு A யிற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கின்றது. அக்கோடு BC யிற்குச் செங்குத்தெனின்,

$$2(1+\lambda)+(1+2\lambda)=0$$

$$\therefore \lambda = -\frac{3}{4}.$$

ஆகவே, A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையுஞ் செங்குத்து

$$x+y+1-\frac{3}{4}(x+2y+1)=0,$$

அல்லது

$$x-2y+1=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$x+2y+1+\lambda(2x+y+1)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு C யிற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டைக் குறிக்கின்றது. அக்கோடு AB யிற்குச் செங்குத்தெனின்,

$$(1+2\lambda)+2+\lambda=0.$$

$$\therefore \quad \lambda=-1.$$

ஆகவே, C யிலிருந்து AB யிற்கு வரையுஞ் செங்குத்து

$$x+2y+1-(2x+y+1)=0,$$

அல்லது

$$-x+y=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

ஆகவே, நிமிர் மையமானது

$$x-2y+1=0,$$
$$y-x=0$$

என்னுங் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியாகும்.

ஆகவே, அதனுடைய ஆள்கூறுகள் (1, 1)

ஒரு இடையத்தின் சமன்பாடும் A, B, C என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகளைத் துணியாமற் பெறலாம்.

CD, BD என்பன முறையே AB, AC என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்பட்டால், AD என்பது பக்கம் BC என்பதை இருகூறிடும். CD இன் சமன்பாடு

$$x+2y+1+\lambda(2x+y+1)=0$$

என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

அது AB யிற்குச் சமாந்தரமாகையால்,

$$(1+2\lambda)-(2+\lambda)=0.$$

$$\therefore \quad \lambda=1.$$

ஆகவே, CD ஆனது

$$3x+3y+2=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

BD இன் சமன்பாடு $x+y+1+\lambda(2x+y+1)=0$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். அது AC யிற்குச் சமாந்தரமாகையால்,

$$2(1+2\lambda)-(1+\lambda)=0.$$

$$\therefore \lambda=-\frac{1}{3}.$$

ஆகவே, BD இன் சமன்பாடு

$$x+y+1-\frac{1}{3}(2x+y+1)=0,$$

அல்லது $x+2y+2=0$ ஆகும்.

ஆகவே, $3x+3y+2+\lambda(x+2y+2)=0$

என்னுஞ் சமன்பாடு D இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டைக் குறிக்கும்.

A யினுடைய ஆள்கூறுகள்

$$x + y = -1,$$
$$x + 2y = -1$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கின்றன.

ஆகவே, A என்பது D இற்கூடாகச் செல்லும் மேற்றந்த கோட்டிற் கிடந்தால்,

$$-3 + 2 + \lambda(-1 + 2) = 0$$
$$\therefore \quad \lambda = 1$$

$\therefore$ AD இன் சமன்பாடு

$$3x + 3y + 2 + (x + 2y + 2) = 0,$$

அல்லது

$$4x + 5y + 4 = 0.$$

பயிற்சி 11

1. (1, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $x + 2y - 1 = 0$ என்னுங் கோட்டோடு தான் $^{-1}\frac{3}{4}$ என்னும் ஒரே கோணத்தை ஆக்கும் இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. ஒருச்சி (1, 2) இலும் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி (3, –1) இலுமுள்ள ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்களுடைய சமன்பாடுகளையும் உச்சிகளுடைய ஆள்கூறுகளையுங் காண்க.

3. P என்பது $y = x$ என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி ; Q என்பது $y = x$ என்னுங் கோடிற்கு PQ செங்குத்தாகும்படி $y = 3x$ என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. PQ வின் மையம் $3y = 5x$ என்னுங் கோட்டின் மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

4. ஓர் இணைகரத்திற்கு இரண்டு எதிருச்சிகள் (1, 1), (2, –3) என்னும் புள்ளிகளில் உண்டு ; ஒரு பக்கம் $2y + 3x = 0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாயும் வேறொரு பக்கம் $y - 2x = 0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயும் இருக்கின்றன. அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. ஒரு சாய்சதுரத்திற்கு இரண்டு அடுத்துள உச்சிகள் (3, 4), (–1, 2) என்பனவற்றில் இருக்கின்றன ; (3, 4) இற்கூடாகச் செல்லும் மூலைவிட்டம் $2y + x = 0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரம். மற்றையிரண்டு உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. P என்பது $ax + by + c = 0$ என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி ; Q என்பது $ax + by + d = 0$ என்னுஞ் சமாந்தரமான கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. $\frac{PR}{RQ} = \lambda$ ஆகுமாறு R என்பது PQ வின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், R என்பது $ax + by + c + \lambda(ax + by + d) = 0$ என்னுங் கோட்டின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

2. அது துணைகொண்டு தந்த கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாய் அவற்றிற்கு நடுவிற் கிடக்குங் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

7. (1, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாக வரையும் ஒரு மாறுங்கோடு x, y அச்சுக்களை முறையே p, q என்பனவற்றிற் சந்திக்கின்றது.

P, Q என்பனவற்றிற்கூடாக முறையே OY, OX என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் வரைந்த கோடுகள் R இற் சந்திக்கின்றன. R இன் ஒழுக்கு $xy - x - y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

8. ஓர் இணைகரத்தினுடைய பக்கங்கள் $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $ax + by + d = 0$, $a'x + b'y + d' = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுகின்றன. அதனுடைய மூலைவிட்டங்கள்,

$$(c' - d')\,(ax + by + c) - (c - d)\,(a'x + b'y + c') = 0,$$
$$(c' - d')\,(ax + by + c) + (c - d)\,(a'x + b'y + c') = 0.$$

என்பன வெனக் காட்டுக.

9. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கம் AC யின்மீது B யிலிருந்து வரைந்த செங்குத்து $y + 2x = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுகின்றது ; C யிலிருந்து AB யின்மீது வரைந்த செங்குத்து $y = 2x$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுகின்றது. BC என்னும் பக்கம் (1, –2) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்றால், A யினுடைய ஆள்கூறுகள்

$x^2 - 4y^2 + 3x - 6y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமெனக் காட்டுக.

10. A (1, 2) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $2x + 3y + 5 = 0$ என்னுங் கோட்டின்மீது வரைந்த செங்குத்து அக்கோட்டை M இற் சந்திக்கின்றது. AM என்னுங் கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை ஒரு பரமானம்பற்றி உணர்த்துக ; M என்னும் புள்ளிக்கு ஒத்த அப் பரமானத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க. AM ஆனது $MN = AM$ ஆகுமாறு N இற்கு நீட்டப்பட்டால், N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. $B \equiv (2, 3)$ எனின், P யானது தந்த கோட்டின்மீது AP, BP என்பன அக்கோட்டிற்குச் சம சரிவிலிருக்கும்படியுள்ள புள்ளியாயிருக்கும்பொழுது P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

11. P என்பது $x + y + 1 = 0$ என்னுங் கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி. PM என்பது $2x + 3y + 5 = 0$ என்னுங் கோட்டை M இற் சந்திக்குமாறு அதற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டுள்ளது ; $MN = PM$ ஆகுமாறு PM என்பது N இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. N இன் ஒழுக்கு

$$13\,(x + y + 1) - 10\,(2x + 3y + 5) = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

12. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயில்லாது ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடுகள் இரண்டு $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுகின்றன. P என்பது (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி ; P யிலிருந்து முதலாங் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்து அவ்விருகோடுகளையும் முறையே M, N என்பனவற்றிற் சந்திக்கின்றது. PMN இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகளை ஒரு பரமானம் பற்றி உணர்த்துக ; M, N என்பனவற்றிற்கு ஒத்த அப் பரமானத்தினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க. அது துணைகொண்டு

$$(aa' + bb')\,(ax_1 + by_1 + c)\,(a'x_1 + b'y_1 + c')$$

என்பது பூச்சியத்திலுஞ் சிறிது அல்லது பெரிதாதற்கேற்ப P என்பது தந்த இரு கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கூர்ங்கோணத்திற்குள்ளே அல்லது விரிகோணத்திற்குள்ளே கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

13. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியினுடைய பக்கங்கள்

$$u_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$u_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$u_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுகின்றன.

அம்முக்கோணியினுடைய இடையங்கள்

$$(a_2b_3 - a_3b_2)u_1 = (a_3b_1 - a_1b_3)u_2,$$
$$(a_3b_1 - a_1b_3)u_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)u_3,$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)u_3 = (a_2b_3 - a_3b_2)u_1$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

அம்மூன்று இடையங்களும் ஒருங்கு சந்திக்குமென வகுத்தறி முறையாற் காட்டுக.

ஒரு கோட்டைக்குறித்து ஒரு புள்ளியினது நிலே.

l என்னும் ஒரு கோடு $ax+by+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுக; P_1, P_2 என்பன (x, y) தளத்தில் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் ஆள்கூறுகளே உடையனவாய் l இன்மீது கிடவாத இரு புள்ளிகளாகுக. $P_1 P_2$ என்னுங் கோடு l இற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், அவ்விரு கோடுகளும் Q என்னும் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும். P_1, P_2 என்பன l இனுடைய எதிர்ப்பக்கங்களில் இருந்தால், Q என்னும் புள்ளி P_1, P_2 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும்; P_1, P_2 என்பன l இனுடைய ஒரே பக்கத்தில் இருந்தால், அது P_1, P_2 என்னுந் துண்டிற்கு வெளியே கிடக்கும். $\dfrac{P_1Q}{QP_2}=k$ ஆகுக; ஆயின், P_1, P_2 என்பன l இனுடைய எதிர்ப்பக்கங்களில் அல்லது ஒரே பக்கத்தில் இருப்பதற்கேற்ப, k என்பது நேர் அல்லது மறையாகும்.

$$Q \equiv \left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \ \frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)$$

ஆகவே, Q என்பது l இன்மீது கிடக்கின்றமையால்,

$$a(x_1+kx_2)+b(y_1+ky_2)+c(1+k)=0.$$

$$\therefore \ k=-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}.$$

ஆகவே, ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி அல்லது எதிர்க் குறிகள் இருப்பதற்கேற்ப P_1, P_2 என்பன l இனுடைய ஒரே பக்கம் அல்லது எதிர்ப் பக்கங்களிற் கிடக்கும்.

P_1P_2 என்னுங் கோடு l இற்குச் சமாந்தரமெனின், P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகள் l இன் ஒரே பக்கத்திற் கிடக்கும்.

$P_3(x_3, y_3)$ என்பது l இன் எதிர்ப்பக்கத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. ஆயின், ax_1+by_1+c, ax_3+by_3+c என்பவற்றிற்கு எதிர்க்குறிகள் இருக்கும்; ax_2+by_2+c, ax_3+by_3+c என்பவற்றிற்கும் எதிர்க்குறிகள் இருக்கும்.

ஆகவே, ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி இருக்கும்.

ஆயின், P_1, P_2 என்பன l இன்மீது கிடவாத எவையேனும் இரு புள்ளிகளாயின், ax_1+by_1+c, ax_2+by_2+c என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி அல்லது எதிர்க் குறிகள் இருத்தற்கேற்ப, அவை l இனுடைய ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிற் கிடக்கும்.

ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம்.

l என்னும் ஒரு கோடு $ax+by+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்; $P(x_1, y_1)$ என்பது l இன்மீது கிடவாத ஒரு புள்ளியாகுக.

l இற்குச் செங்குத்தாய் P யிற்கூடாகச் செல்கின்ற கோட்டின் சமன்பாடு

$$a(y-y_1)-b(x-x_1)=0 \text{ என்பதாகும்} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a, b என்பன பூச்சியமல்லவெனின்,

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=t$$

என எழுதலாம்.

ஆகவே P யினூடாகச் செல்லுஞ் செங்குத்தின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள், t என்பது ஒரு சாராமாறியாயின்,

$$x=x_1+at, \ \ y=y_1+bt$$

என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாம். a அல்லது b பூச்சியமாயிருக்கும் பொழுதும் இப்பரமான வகைக்குறிப்பு உண்மையாகுமென்று சமன்பாடு (1) இலே நேரே பிரதியிடல் காட்டுகின்றது.

N என்பது P யிலிருந்து l இன்மீது வரைந்த செங்குத்தின் அடியாகுக. ஆகவே, k என்பது N இற்கு ஒத்த t என்னும் பரமானத்தின் பெறுமானமாயின், N இனுடைய ஆள்கூறுகள் x_1+ak, y_1+bk என்பன. N என்பது l இன்மீது கிடத்தலால்,

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0.$$

$$\therefore \ k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

$$\therefore |k|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{a^2+b^2}.$$

இங்கு, $|k|$ என்பது k இன் எண் பெறுமானத்தைக் குறிக்கின்றது.

$$P\equiv(x_1, y_1), \quad N\equiv(x_1+ak, y_1+bk).$$

$$\therefore \ PN^2=(x_1+ak-x_1)^2+(y_1+bk-y_1)^2=(a^2+b^2)k^2.$$

ஆகவே, l இலிருந்து P யின் செங்குத்துத் தூரம்

$$|k|\sqrt{(a^2+b^2)}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

அதாவது $ax+by+c=0$ என்னுங் கோட்டிலிருந்து (x_1,y_1) என்னும் புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம்,

$$\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ என்பதன் எண் பெறுமானமாகும்.}$$

உ-ம். 1. $ax+by+c=0$, $ax+by+d=0$ என்னுஞ் சமாந்தரமான கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

முதலாங் கோட்டில் யாதுமொரு புள்ளி (x_1, y_1) என்பதை எடுக்க. மற்றக் கோட்டிலிருந்து இப்புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம் அவ்விரு சமாந்தரமான கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரமாகும்.

$\therefore$ அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்

$$=\frac{|ax_1+by_1+d|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

(x_1, y_1) எனபது $ax+by+c=0$ என்னுங் கோட்டிற் கிடத்தலால்,

$$ax_1+by_1+c=0,$$

அல்லது $$ax_1+by_1=-c.$$

ஆகவே, $ax+by+c=0$, $ax+by+d=0$ என்னுங் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{|d-c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$ ஆகும்.

உ–ம். 2. ஒரு முக்கோணியினுடைய உச்சிகள் A, B, C என்பன வற்றினுடைய ஆள்கூறுகள் $(1, 1)$, $(-2, -3)$, $(-3, 4)$ ஆகும். ABC என்னும் முக்கோணிக்கு வெளியே, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, என்பன முறையே AB, BC, CA என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாயும் அவற்றிலிருந்து ஓரலகு தூரமுமாயிருக்கும்படி $A'B'C'$ என்னும் ஒரு முக்கோணி வரையப்படுகின்றது. $A'B'C'$ என்னும் முக்கோணியி னுடைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

AB யின் சமன்பாடு $$y-1=\tfrac{4}{3}(x-1),$$

அல்லது $$4x-3y-1=0.$$

(x_1, y_1) என்பது $A'B'$ இன்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளி. AB யிலிருந்து அப்புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம்.

$$\left|\frac{4x_1-3y_1-1}{5}\right|$$

$$\therefore \left|\frac{4x_1-3y_1-1}{5}\right|=1.$$

(x_1, y_1), $(-3,4)$ என்பன AB யினுடைய எதிர்ப்பக்கங்களிற் கிடத்தலால் $4x_1-3y_1-1$ என்பதற்கு $4(-3)-3(4)-1$ என்பதன் குறியின் மறைக்குறி இருக்கும்.

$\therefore$ $4x_1-3y_1-1$ என்பது நேர்க்குறியுள்ளது.

$$\therefore \frac{4x_1-3y_1-1}{5}=1.$$

$$\therefore 4x_1-3y_1-6=0.$$

(x_1, y_1) என்பது $A'B'$ இன்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயிருத்த லால், $A'B'$ இன் சமன்பாடு $4x-3y-6=0$ ஆகும்.

AC யின் சமன்பாடு,

$$y-1=-\tfrac{3}{4}(x-1),$$

அல்லது $$3x+4y-7=0.$$

(x_1, y_1) என்பது A',C', இன் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியெனின்,

$$\left|\frac{3x_1+4y_1-7}{5}\right|=1$$

$3x_1+4y_1-7$ என்பதற்கு $3(-2)+4(-3)-7$ என்பதன் எதிர்க்குறி இருக்கும்.

$$\therefore \frac{3x_1+4y_1-7}{5}=1,$$

அல்லது $$3x_1+4y_1-12=0.$$

$\therefore$ $A'C'$ இன் சமன்பாடு

$$3x+4y-12=0.$$

அதுபோல, $B'C'$ இன் சமன்பாட்டையுங் காணலாம்.

இரு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுடைய இருகூறாக்கிகள்.

$ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று, சமாந்தரமல்லாத இரு நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக.

(x_1,y_1) என்பது அவ்விரு கோடுகளிலிருந்துஞ் சமதூரமான ஒரு புள்ளியாயின்,

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\frac{|a_1x_1+b_1y_1+c_1|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}$$

P,Q என்னும் இரண்டு எண்களுக்கு ஒரே எண் பெறுமானம் உண் டெனின், P,Q என்பவற்றிற்கு ஒரே குறி அல்லது எதிர்க் குறிகள் இருத்தற்கேற்ப $P=Q$ அல்லது $-Q$.

$$\therefore \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}} \text{ அல்லது } -\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}.$$

ஆகவே, அவ்விரு கோடுகளினுமிருந்து சமதூரமான யாதுமொரு புள்ளி யின் ஆள்கூறுகள் $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}$ அல்லது $-\dfrac{a_1x+b_1y+c}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுள் ஒன்றைத் தீர்த்தல் வேண்டும்.

ஆனல், தந்த இரு கோடுகளிலிருந்து சமதூரமான ஒரு புள்ளி அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்றின் இருகூறாக்கியின் மீது கிடத்தல் வேண்டுமென்று அறிவோம்.

ஆகவே அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள இரு கோணங்களுடைய இரு கூறுக்கிகள்

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}$$

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=-\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும்.

உ-ம். $A\equiv(1,1)$, $B\equiv(-2,-3)$, $C\equiv(-3,\ 4)$ என்பனவாயுள்ள ABC என்னும் முக்கோணியின் கோணம் A யின் உள்ளிரு கூறுக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB, AC என்பனவற்றினுடைய சமன்பாடுகள்

$$4x-3y-1=0,$$

$$3x+4y-7=0$$

என்பன.

ஆகவே, கோணம் A யின் உள்ளிருகூறுக்கி

$$\frac{4x-3y-1}{5}=\pm\frac{3x+4y-7}{5}$$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுள் ஒன்றுலே தரப்படும்; மற்றச் சமன்பாடு வெளி யிருகூறுக்கியைத் தரும். எச் சமன்பாடு உள்ளிருகூறுக்கியைத் தருமென்பதைத் துணிதற்கு B, C என்பன உள்ளிருகூறுக்கியின் எதிர்ப்பக்கங்களிலும் வெளியிருகூறுக்கி யின் ஒரே பக்கத்திலும் இருக்கின்றன என்னும் பண்பைப் பயன்படுத்து கின்றேம்.

$$\frac{4x-3y-1}{5}=\frac{3x+4y-7}{5}$$

அல்லது $x-7y+6=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

$x-7y+6$ என்பதில் B, C என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகளைப் பிரதி யிடும் பொழுது மறைக் குறிகளேயுடைய $-2+21+6$, $-3-28+6$ என்பன வற்றைப் பெறுகின்றேம்.

ஆகவே, $x-7y+6=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு கோணம் A யின் உள்ளிருகூறுக்கியைத் தருகின்றது.

இரு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறுக்கி.

$ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங் குத்தல்லாத இரண்டு வெட்டுங் கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக.

அக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்று கூர்ங்கோண மாயும் மற்றையது விரிகோணமாயுமிருக்கும். θ என்பது அக்கூர்ங்கோண மாகுக; ஆயின், $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\pi-\theta<\pi$. l_1 என்பது அக்கூர்ங்கோணத் தின் இருகூறுக்கியைக் குறிக்க; l_2 என்பது அவ்விரிகோணத் தின் இருகூறுக்கியாகுக. ஆயின், l_1 இற்குந் தந்த கோடுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடையிலுள்ள கூர்ங் கோணம் $\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$; l_2 இற்கும் இக் கோடுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடையிலுள்ள கூர்ங் கோணம் $\frac{\pi-\theta}{2}>\frac{\pi}{4}$.

ஆகவே, l_1 இற்கும் அக்கோடுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணத்தினது தான்சன் 1 இலுஞ் சிறிது; l_2 இற்கும் அக் கோடுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடையிலுள்ள கூர்ங் கோணத்தினது தான்சன் 1 இலும் பெரிது. இருகூறுக்கிகள் இரண்டினுள் எது கூர்ங்கோணத்தை இருகூறிடும் எனத் துணிதற்கு இவ்வுடைமை உதவும்.

உதாரணமாக, $x+y-1=0$, $x-7y+2=0$ என்னுஞ் சமன் பாடுகளாலே தரப்பட்ட கோடுகள் இரண்டையும் ஆராய்க.

அவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணங்களின் இருகூறுக்கிகளின் சமன் பாடுகள்

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{x-7y+2}{5\sqrt{2}}$$ என்பன.

இருகூறுக்கிகளுள் ஒன்று

$$5(x+y-1)=x-7y+2,$$

அல்லது $4x+12y-7=0$ என்பதாலே தரப்படும்.

இக்கோட்டின் சரிவு $-\frac{1}{3}$.

தந்த முதலாங் கோட்டின் சரிவு -1.

இக்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணத்தினது தான்சன்

$$\left|\frac{-1+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right|=\tfrac{1}{2}<1.$$

∴ கூர்ங் கோணத்தின் இருகூறுக்கி

$4x+12y-7=0$ என்பது.

பயிற்சி 12

1. $5x+12y+1=0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் அக்கோட்டிற்கு $(-5,-1)$ என்னும் புள்ளி இருக்கும் அதே பக்கத்தில் அக்கோட்டிலிருந்து 2 அலகு தூரத்திலுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $x+2y+1=0$, $2x+11y+1=0$, $11x-2y+1=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும் பக்கங்களேயுடைய முக்கோணியின் உள்வட்டமையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அம்முக்கோணியின் வெளி வட்டங்களுள் ஒன்றின் மையத்தினுடைய ஆள்கூறுகளேயுங் காண்க.

3. $3x + 4y + 1 = 0$, $3x + 4y - 3 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ என்னுங் கோடுகளைத் தொடும் இரு வட்டங்களின் மையங்களினுடைய ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

4. ABC என்பது $A \equiv (0, -1)$, $B \equiv (-2, -3)$, $C \equiv (1, 1)$ ஆயுள்ள ஒரு முக்கோணி. BCயைத் தன்னுடைய பக்கங்களுள் ஒன்றாய் $\triangle ABC$ யிற்கு வெளியாற் கிடக்குஞ் சதுரத்தினுடைய ஏனை உச்சிகளைக் காண்க.

5. $5x + 12y + 1 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$ என்னுங் கோடுகளைத் தொட்டுக் கொண்டு அக் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கூர்ங் கோணத்திற்குட் கிடக்கும் ஓரலகு ஆரையுடைய வட்டங்களின் மையங்களினுடைய ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. $cd>0$ அல்லது <0 ஆதற்கேற்ப, $ax + by + c = 0$, $bx + ay + d = 0$ என்னுங் கோடுகளுக்கு இடையில் உற்பத்தித் தானத்தைக் கொள்கின்ற கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு

$$(a-b)(x-y) + (c-d) = 0,$$

அல்லது

$$(a+b)(x+y) + (c+d) = 0$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

7. $A \equiv (0, 2)$, $B \equiv (2, 0)$; O என்பது உற்பத்தித் தானம். OPA, OPB என்பனவற்றிற்கு ஒரே பருமன் இருக்குமாறு P என்னும் ஒரு மாறும் புள்ளி இயங்குகின்றது. P என்பது $y - x = 0$, $y + x = 2$, $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ என்னும் ஒழுக்குக்களுள் ஒன்றின் மீதாயினுங் கிடத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

8. (x, y) என்னுந் தளத்திலே $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ என்னும் நிலையான புள்ளிகள் ஒரு மாறுங் கோட்டின் ஒரே பக்கத்திற் கிடக்கும்படியும் அக்கோட்டிலிருந்து அந்நிலையான புள்ளிகளினுடைய தூரங்களின் பெருக்கம் ஒரு மாறிலியாய் $3a^2$ இற்குச் சமனாகும்படியும் அம்மாறுங்கோடு இயங்குகின்றது. அந்நிலையான புள்ளிகளுள் யாதுமொன்றிலிருந்து அக் கோட்டின்மீது வரையுஞ் செங்குத்தின் அடி $x^2 + y^2 = 4a^2$ என்னும் வட்டத்தின் மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

[x கோசை $\alpha + y$ சைன்$\alpha - p = 0$ என்னும் வடிவத்தில் அக்கோட்டின் சமன்பாட்டை எடுக்க].

9. $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ என்னும் நிலையான புள்ளிகள் ஒரு மாறுங் கோட்டின் எதிர்ப் பக்கங்களிற் கிடக்குமாறும் அக்கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளிகளினுடைய தூரங்களின் பெருக்கம் a^2 என்பதற்குச் சமனாகுமாறும் அம்மாறுங் கோடு இயங்குகின்றது. அந்நிலையான புள்ளிகளுள் யாதுமொன்றிலிருந்து அக்கோட்டின் மீது வரையுஞ் செங்குத்தின் அடி $x^2 + y^2 = 3a^2$ என்னும் வட்டத்தின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

10. இரண்டு சமாந்தரமான கோடுகள் $px + qy + r = 0$, $px + qa + s = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுகின்றன. $(px_1 + qy_1 + r)(px_1 + qy_1 + s) < 0$ எனின், (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி அந்நேர் கோடுகளுக்கு இடையிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 4

வட்டம்

ஒரு தளத்தில் A என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாயும் P என்பது ஒரு மாறும் புள்ளியாயும் இருக்க, A, P என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள தூரம் மாறாதிருக்கும்படி P யானது இயங்கினால், P யின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகும். அத்தளத்தில் செவ்வகவச்சுக்கள்பற்றி A, P என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகள் (a, b), (x, y) என்பனவாகுக ; அம் மாறாத் தூரம் r ஆகுக. ஆயின், $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

ஆகவே, இது, மையம் (a, b) ஆயும் ஆரை r ஆயுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

அச்சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

என எழுதப்படலாம். இது

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்னும் வடிவத்தில் உள்ளது ; இங்கு g, f, c என்பன மாறிலிகள்.

மறுதலையாக, $g^2 + f^2 - c$ என்பது நேராயிருக்கும்பொழுது,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள எச்சமன்பாடும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் ; அச்சமன்பாடு

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

தன்மையம் $(-g, -f)$ ஆயும் தன்னாரை $\sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$ ஆயுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடே இது.

உ-ம். $(1, 0)$, $(-1, -1)$, $(2, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அச்சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆகுக.

அம்மூன்று புள்ளிகளும் அவ்வட்டத்தின் மீது கிடத்தலால்,

$$1 + 2g + c = 0,$$
$$1 + 1 - 2g - 2f + c = 0,$$
$$4 + 1 + 4g + 2f + c = 0.$$
$$\therefore\ c = -6,\ g = \tfrac{5}{2},\ f = -\tfrac{9}{2}.$$

$\therefore$ அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 5x - 9y - 6 = 0$.

தந்த ஒரு விட்டமுள்ள வட்டம்.

$A \equiv (x_1, y_1)$ ஆயும், $B \equiv (x_2, y_2)$ ஆயுமிருக்க.

$P(x, y)$ என்பது AB என்பதை ஒரு விட்டமாகவுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாகுக. ஆயின் AP, BP என்னுங் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

$x \neq x_1$ எனின், AP யின் சரிவு $= \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$.

$x \neq x_2$ எனின், BP யின் சரிவு $= \dfrac{y-y_2}{x-x_2}$.

$$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$$\therefore (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$x = x_1$ ஆயின், AP யானது y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

$\therefore BP$ யானது x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

$\therefore y = y_2$.

ஆகவே, மேலுள்ள சமன்பாடு இவ்வகையினுந் தீர்க்கப்படும்.

அதுபோல, $x = x_2$ ஆகும் பொழுதும் அது தீர்க்கப்படும்.

$\therefore AB$ என்பதை விட்டமாகவுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0.$$

ஒருவட்டம் பற்றிக்காணும் ஒரு புள்ளியினது நிலை.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகுக. (x_1, y_1) என்பன அத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினுடைய ஆள் கூறுகளாகுக. $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ எனின், அப்புள்ளி அவ்வட்டத்தின் பரிதியின் மீது கிடக்கும். அன்றெனின், அவ்வட்டமையத்திலிருந்து அதனுடைய தூரம் அவ்வட்டவாரையிலுஞ் சிறிது அல்லது பெரிதாதற் கேற்ப அப்புள்ளி அவ்வட்டத்திற்குள்ளே அல்லது வெளியே கிடக்கும்.

அவ்வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$; அதனுரை $\sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$

ஆகவே, $(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 \lessgtr g^2 + f^2 - c$,

அதாவது, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \lessgtr 0$ ஆதற்கேற்ப

அப்புள்ளி அவ்வட்டத்திற்கு உள்ளே அல்லது வெளியே கிடக்கும்.

தந்த ஒரு புள்ளியில் ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலி.

(x_1, y_1) என்பது $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்னும் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. (x_1, y_1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்ற அவ்வட்டத்தின் ஆரை (x_1, y_1), $(-g, -f)$ என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோடாகும்.

$\therefore$ அதன் சமன்பாடு,

$$(y-y_1)(x_1+g) = (x-x_1)(y_1+f).$$

(x_1, y_1) இலுள்ள தொடலி இவ்வாரைக்குச் செங்குத்தாய் (x_1, y_1) இற்கூடாகச் செல்லுங் கோடாகும்.

$\therefore$ அத்தொடலியின் சமன்பாடு,

$$(x-x_1)(x_1+g) + (y-y_1)(y_1+f) = 0,$$

அல்லது $$xx_1 + yy_1 + gx + fy - x_1^2 - y_1^2 - gx_1 - fy_1 = 0$$

(x_1, y_1) என்பது அவ்வட்டத்திற் கிடத்தலால்,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$$

$\therefore (x_1, y_1)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0.$$

அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x.x + y.y + g(x+x) + f(y+y) + c = 0$ என எழுதப்பட்டால், (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு ஒவ்வொரு உறுப்பிலுமுள்ள ஒரு x ஐ x_1 என்பதாலும் ஒரு y யை y_1 என்பதாலும் இடம் பெயர்த்தலாற் பெறப்படும்.

உதாரணமாக, $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$ என்னும் வட்டத்திற்கு $(2, 1)$ இலுள்ள தொடலி

$$2x + y + (x+2) + 3(y+1) - 15 = 0.$$

அல்லது $$3x + 4y - 10 = 0.$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலி $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$ என்பது.

தொடலியாதற்றன்மைக்குரிய நிபந்தனை.

ஒரு கோடானது ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலியெனின், அக்கோட்டிலிருந்து மையத்தின் செங்குத்துத் தூரம் ஆரைக்குச் சமன் ஆகும். மறுதலையாக, ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு வட்டத்தின் மையத்தின் செங்குத்துத் தூரம் ஆரைக்குச் சமனுயின், அக்கோடு அவ்வட்டத்திற்குத் தொடலியாகும். வேறொரு வகையாகச் சொல்லப்புகின், ஒரு கோடானது ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலியாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை அக்கோட்டிலிருந்து அவ்வட்டமையத்தின் செங்குத்துத் தூரம் அவ்வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமன் என்பதே.

அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ஆகுக ; அக் கோட்டின் சமன்பாடு $lx+my+n=0$ ஆகுக. அவ்வட்டத்தின் மையம் $(-g,-f)$; அதன் ஆரை $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$.

அக்கோடு அவ்வட்டத்திற்குத் தொடலியாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை $\frac{|-lg-mf+c|}{\sqrt{(l^2+m^2)}}=\sqrt{(g^2+f^2-c)}$.

அல்லது $(-lg-mf+c)^2=(l^2+m^2)(g^2+f^2-c)$.

சிறப்பாக, $lx+my+n=0$ என்னுங் கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை,

$$a^2(l^2+m^2)=n^2 ;$$

இம்முடிவைப் பின்வருமாறும் பெறலாம் :—

(x_1, y_1) என்பது தொடு புள்ளியாகுக. (x_1, y_1) இல் அவ்வட்டத்திற்குத் தொடலி $xx_1+yy_1-a^2=0$.

ஆகவே, இச்சமன்பாடு $lx+my+n=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டோடு ஒன்றுறும்.

$$\therefore \frac{x_1}{l}=\frac{y_1}{m}=\frac{-a^2}{n}.$$

$$\therefore x_1=-\frac{a^2l}{n},\ y_1=\frac{-a^2m}{n}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) என்பது அவ்வட்டத்தின் மீது கிடத்தலால்,

$$\left(-\frac{a^2l}{n}\right)^2+\left(\frac{-a^2m}{n}\right)^2=a^2.$$

$$\therefore (l^2+m^2)a^2=n^2.$$

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடலி.

(x_1, y_1) என்பது $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக.

(x_1, y_1) இற்கூடாக y அச்சிற்குச் சமாந்தரமின்றிச் செல்லும் எக் கோடும்

$$y-mx-y_1+mx_1=0$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

$$\left\{\frac{-f+mg-y_1+mx_1}{\sqrt{(1+m^2)}}\right\}=g^2+f^2-c.$$

அல்லது $\{m(x_1+g)-y_1-f\}^2=(1+m^2)(g^2+f^2-c)$

எனின் இக்கோடு அவ்வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாகும்.

இது m இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. (x_1,y_1) இலிருந்து y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாததாய் ஒரு தொடலியாயினும் இருத்தல் வேண்டுமென்று அறிவதால், இச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இருத்தல் வேண்டும். m இற்கு மெய்மூலங்கள் இருத்தல் அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினது தன்மை காட்டியை ஆராய்வதால் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படலாம். அச்சமன்பாடு m இற்கு இரு மூலங்களைத் (m_1, m_2 என்க) தருமாயின் (x_1, y_1) இலிருந்து அவ்வட்டத்திற்குத் தொடலிகள்

$$y-y_1=m_1(x-x_1),$$

$$y-y_1=m_2(x-x_2) \text{ என்பன.}$$

அச்சமன்பாடு m இற்கு ஒரு பெறுமானத்தையே தருமாயின், (அச்சமன்பாட்டில் m^2 இன் குணகம் பூச்சியத்திற்கு ஒடுங்கும்போது இது நிகழும்), (x_1, y_1) இற்கூடாக y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாததாய் ஒரு தொடலியே இருக்கும்.

மற்றைத் தொடலி y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும் ; ஆயின் அதன் சமன்பாடு $x-x_1=0$.

அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினது தன்மைகாட்டியை ஆராய்வதால், (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி அவ்வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், அதாவது $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0$ எனின், அச்சமன்பாடு பொருந்தும் மூலங்களைத் தரமாட்டாதென எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

உ-ம். (0, 6) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

அவ்வட்டத்தின் மையம் (1, -1) ; அதன் ஆரை 5.

y அச்சிற்குச் சமாந்தரமல்லாததாய் (0, 6) இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோடு $y-6=mx$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$$\frac{-1-6-m}{\sqrt{(1+m^2)}}=\pm 5,$$

அல்லது $(m+7)^2=25\ (1+m^2)$,

அல்லது $12m^2-7m-12=0$ எனின்,

அதாவது $m=\frac{4}{3}$ அல்லது $-\frac{3}{4}$ எனின்,

இக்கோடு அவ்வட்டத்தைத் தொடும்.

$\therefore$ அவ்விரு தொடலிகளுடைய சமன்பாடுகள்

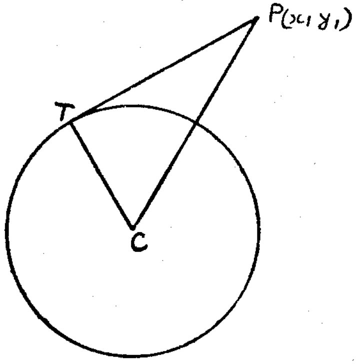
$$3y-4x-18=0,$$

$$4y+3x-24=0$$

என்பன.

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வரையும் ஒரு தொடலியினது நீளம்.

C என்பது மையமாயும், T என்பது P யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரைந்த ஒரு தொடலியினது தொடுபுள்ளியாயுமுள்ள $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வெளியே $P(x_1, y_1)$ என்பது கிடந்தால்,



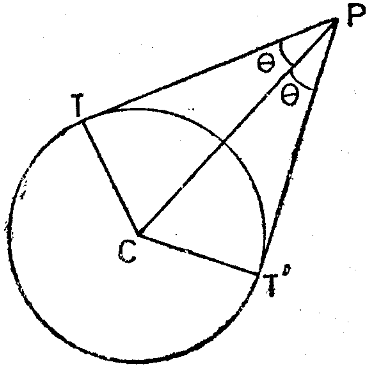
$$PT^2 = CP^2 - CT^2 = (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

ஆகவே, (x_1, y_1) இலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலியினது நீளத்தின் வர்க்கம்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடலிகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்.

PT, PT' என்பன மையம் C யாயுள்ள ஒரு வட்டத்திற்கு P என்னும் ஒரு வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வரைந்த தொடலிகளாயின்,



$$\text{சைன் } \angle CPT = \frac{r}{CP};$$

இங்கு r என்பது அவ்வட்டத்தின் ஆரை.

ஆகவே, 2θ என்பது (x_1, y_1) இலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணமாயின்,

$$\text{சைன்}^2\theta = \frac{g^2+f^2-c}{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2}.$$

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடலிகளினுடைய தொடுநாண்.

T, T' என்பன (x_1, y_1) இலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளினுடைய தொடுபுள்ளிகளாகுக.

அவ்வட்டத்தின் TT' என்னும் நாண் (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியைக் குறித்துத் தொடுநாண் எனப்படும்.

(x_2, y_2), (x_3, y_3) என்பன T, T' என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகளாகுக.

T, T' என்பனவற்றிலுள்ள தொடலிகளினுடைய சமன்பாடுகள்

$$xx_2 + yy_2 + g(x+x_2) + f(y+y_2) + c = 0,$$
$$xx_3 + yy_3 + g(x+x_3) + f(y+y_3) + c = 0 \text{ என்பன.}$$

இத்தொடலிகள் (x_1, y_1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றமையால்,

$$x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1+x_2) + f(y_1+y_2) + c = 0,$$
$$x_1x_3 + y_1y_3 + g(x_1+x_3) + f(y_1+y_3) + c = 0 \text{ என்பன.}$$

ஆகவே, (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்னும் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும்

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

என்னுங் கோட்டின்மீது கிடக்கும்.

ஆகவே, இது தொடுநாணின் சமன்பாடாகும்.

இவ்வண்ணம் (x_1, y_1) என்னும் ஒரு வெளிப் புள்ளியைக் குறித்து எடுக்கப்படும் தொடுநாணின் சமன்பாடு (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி அவ் வட்டத்திற் கிடக்கும்பொழுது அப்புள்ளியில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலியின் சமன்பாட்டோடு ஒரே வடிவினதாகும்.

உ-ம். (1,2) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+x+y-1=0$ என்னும் வட்டத்தை P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு ஒரு மாறுங் கோடு வரையப்படுகின்றது ; P, Q என்பனவற்றிலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. R இன் ஒழுக்கு ஒரு நேர் கோடெனக் காட்டுக.

அம்மாறுங் கோட்டின் யாதுமொரு நிலைக்கு R இனுடைய ஆள்கூறுகள் (x_1, y_1) ஆகுக.

ஆயின், PQ வின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}(x + x_1) + \frac{1}{2}(y + y_1) - 1 = 0.$$

இக்கோடு $(1, 2)$ என்பதற்கூடாகச் செல்கின்றமையால்,

$$x_1 + 2y_1 + \frac{1}{2}(1 + x_1) + \frac{1}{2}(2 + y_1) - 1 = 0,$$

அல்லது

$$3x_1 + 5y_1 + 1 = 0.$$

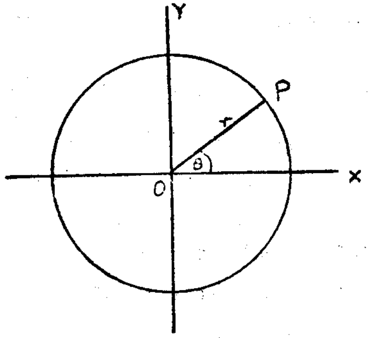
$\therefore$ R இனுடைய ஆள்கூறுகள் என்றும் $3x + 5y + 1 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்.

$\therefore$ R இன் ஒழுக்கு,

$3x + 5y + 1 = 0$ என்னும் நேர்கோடாகும்.

ஒரு வட்டத்தின் பரமான வகைக்குறிப்பு.

$x^2 + y^2 = r^2$ என்னும் வட்டத்தை ஆராய்க. OP யானது OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும்படியாக P என்பது பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், P யினுடைய ஆள்கூறுகள்



$$x = r \text{ கோசை } \theta,$$
$$y = r \text{ சைன் } \theta$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும். இச்சமன்பாடுகள் அவ்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை θ என்னும் பரமானம் பற்றி ஒரு பரமான வகைக்குறிப்பைத் தரும்.

P யிலுள்ள தொடலி OP யிற்குச் செங்குத்தாதலால், அத்தொடலியின் சமன்பாடு

$$x \text{ கோசை } \theta + y \text{ சைன் } \theta = r.$$

ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ என்னும் வடிவத்திலிருந்தால், பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$x = a + r$ கோசை θ, $y = a + r$ சைன் θ என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும் ; இங்கு θ என்பது ஒரு மாறும் பரமானம்.

$(a + r \text{ கோசை } \theta, a + r \text{ சைன் } \theta)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$(x - a) \text{ கோசை } \theta + (y - b) \text{ சைன் } \theta = r.$$

பயிற்சி 13

1. ஒவ்வொன்றும் 2 அலகு ஆரையுடையதாய் ஆள்கூற்றச்சுக்களைத் தொடும் நான்கு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளையும் எழுதுக.

2. $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $2x + y + 5 = 0$ என்னுங் கோட்டை $(-2, -1)$ என்னும் புள்ளியிலே தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

3. $(-5, -7)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $3x + 4y - 7 = 0$ என்னுங் கோட்டைத் தொடும் 5 அலகு ஆரையுடைய வட்டங்களுள் ஒன்றன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. A $(-1, -2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக OX ஒடு $\frac{3\pi}{4}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் ஒரு கோடு வரையப்படுகின்றது. இக்கோடு OX, OY என்பனவற்றை முறையே P, Q என்பனவற்றில் வெட்டினால், PQ வை விட்டமாகவுள்ள வட்டத்திற்கு A யிலிருந்து வரைந்த தொடலிகளினது தொடு நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. $(1,0)$, $(-1,0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்ற எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. A என்பது y அச்சிற் கிடவாத ஒரு புள்ளியாயும், C யிற்கு வெளியே A கிடக்குமாறு C என்பது அத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டமாயுமிருந்தால், C என்னும் வட்டத்திற்கு A யிலிருந்து வரைந்த தொடலிகளினது தொடு நாண் என்றும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமென்று காட்டுக ; இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை A யின் ஆள்கூறுகள் பற்றிக் காண்க.

6. $3x + 4y = 0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ என்னும் வட்டத்தினுடைய தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க ; அவற்றின் தொடு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையுங் காண்க.

7. x அச்சை உற்பத்தித் தானத்திலே தொடுகின்ற ஒரு வட்டத்திற்கு $(2,1)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து வரைந்த தொடலியினது நீளம் 2 அலகு ஆயின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. x கோசை $\theta + y$ சைன் $\theta = 3$ என்னுங் கோடு $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமாறு கோசை θ, சைன் θ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

அது துணைகொண்டு இவ்வட்டத்திற்கும் $x^2 + y^2 = 9$ என்னும் வட்டத்திற்கும் பொதுவாயுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

9. P என்பது $x^2 + y^2 = 4$ என்னும் வட்டத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி ; A என்பது $(1, 1)$ என்னும் புள்ளி. AP யின் மையம் $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$ என்னும் வட்டத்திற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

10. ஒரு கோடு $lx + my + n = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலும், ஒரு வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் சமன்பாட்டாலுந் தரப்படுகின்றன. A என்னும் ஒரு தனிப் புள்ளியானது தனக்கூடாக அவ்வட்டத்தை P, Q என்பனவற்றில் வெட்டும்படி ஒரு மாறுங்கோடு வரையப்படும்பொழுது P, Q என்பனவற்றிற்கூடாக அவ்வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலிகள் தந்த கோட்டிற் சந்திக்குமாறு உண்டென்று காட்டுக. புள்ளி A யின் ஆள்கூறுகளை l, m, n, a என்பனவற்றிற் காண்க.

ஒரு வட்டமும் ஒரு நேர்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாயும் $lx + my + n = 0$ என்பது ஒரு கோட்டின் சமன்பாடாயும் இருக்க $m \neq 0$ எனின், அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = -\frac{lx + n}{m} \text{ என எழுதப்படலாம்.}$$

அவ்வட்டத்திற்கும் அக்கோட்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகள் உண்டெனின், அவற்றின் ஆள்கூறுகள் அவ்விரு சமன்பாடுகளையுந் தீர்த்தல் வேண்டும். இச்சமன்பாடுகளில் y யை நீக்கினால்,

$$x^2+\left(\frac{lx+n}{m}\right)^2+2gx-2f\frac{lx+n}{m}+c=0.$$

x^2 இன் குணகம் பூச்சியமல்லாததால், இது x இலுள்ள ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ; அதற்கு வேறு வேறான இரு மெய் மூலங்கள் அல்லது பொருந்து மெய்மூலங்கள் இருக்கலாம் அல்லது ஒரு மூலமும் இல்லாதிருக்கலாம்.

அதற்கு வேறு வேறான இரு மூலங்கள் இருந்தால், அவ்வட்டமும் அக்கோடும் இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டும் ; அவ்விரு மூலங்களும் அவ்வெட்டுப் புள்ளிகளின் கிடைக்கூறுகளைத் தரும். அவற்றினுடைய நிலைக் கூறுகள் $y=-\dfrac{lx+n}{m}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படும்.

x இலுள்ள அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்து மூலங்கள் இருந்தால், அவ்வட்டமும் அக்கோடும் இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டும் ; அதாவது, அக்கோடு அவ்வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாகும் ; அப்பொருந்து மூலங்களின் பெறுமானந் தொடுபுள்ளியின் கிடைக்கூறைத் தரும்.

x இலுள்ள அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலம் யாதும் இல்லையெனின், அவ்வட்டமும் அக்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டா.

$m=0$ எனின், l பூச்சியமாகாது.

அக்கோட்டின் சமன்பாட்டை $x=-\dfrac{my+n}{l}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதி முன்போல வாதிக்கலாம்.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரையை ஒரு கோட்டிலிருந்து அவ்வட்ட மையத்தின் செங்குத்துத் தூரத்துடன் ஒப்பிடுதலால், அவ்வட்டமும் அக்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் பிரசினம் மிக எளிதாகத் தீர்க்கப்படலாம். ஆரை $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ ஆகும் ; அக்கோட்டிலிருந்து மையத்தின் செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{|-lg-mf+n|}{\sqrt{(l^2+m^2)}}$$

$\therefore$ $\dfrac{|-lg-mf+n|}{\sqrt{(l^2+m^2)}}$ என்பது $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ என்பதிலுஞ் சிறிது அல்லது பெரிதாதற் கேற்ப, அவ்வட்டமும் அக்கோடும் இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டும் அல்லது ஒருபோதும் வெட்டா.

$\dfrac{|-lg-mf+n|}{\sqrt{(l^2+m^2)}}=\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ எனின், அக்கோடு அவ்வட்டத்தைத் தொடும்.

உதாரணமாக, $x^2+y^2+2x+6y-1=0$ என்னும் வட்டத்தையும் $2x+3y+1=0$ என்னுங் கோட்டையும் எடுக்க.

ஆரையின் வர்க்கம் $=1+3^2+1=11.$

அக்கோட்டிலிருந்து மையம் $(-1,-3)$ இனது தூரத்தின் வர்க்கம் $=\dfrac{(-2-9+1)^2}{13}=\dfrac{100}{13}<11.$

ஆகவே, அக்கோடு அவ்வட்டத்தை இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டும்.

ஒரு வட்டமும் ஒரு கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்.

$S=0,\ u=0$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடும் ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுமாகுக ; இங்கு S என்பது $x^2+y^2+2gx+2fy+c$ என்பதையும் u என்பது $lx+my+n$ என்பதையுங் குறிக்கின்றன.

$S+\lambda u=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை ஆராய்க ; இங்கு λ என்பது $x,\ y$ என்பனவற்றைச் சாராது.

இச்சமன்பாடு $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ என்னும் வடிவினது ஆகையால் அது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

தந்த அவ்வட்டத்திற்கும் அந்நேர் கோட்டிற்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $S=0,\ u=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் ; ஆகவே, λ இன் பெறுமானம் எதுவாயிருப்பினும், அவை $S+\lambda u=0$ என்பதைத் தீர்க்கும்.

ஆகவே, λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும், $S+\lambda u=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $S=0$ என்னும் வட்டமும் $u=0$ என்னுங் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

உ-ம். P,Q என்பன $x^2+y^2+2x-8=0$ என்னும் வட்டமும் $x+y-1=0$ என்னுங் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளாயின், PQ என்பதை விட்டமாகவுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $x^2+y^2+2x-8+\lambda(x+y-1)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $P,\ Q$ என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். இவ்வட்டத்தின் மையம் $\left(-1-\dfrac{\lambda}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$ ஆகும்.

PQ என்பது இவ்வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாயின், அதன் மையம் PQ வின் மீது கிடக்கல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad -1-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}-1=0$$

$$\therefore \lambda=-2.$$

ஆகவே, வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2x-8-2(x+y-1)=0,$$

அல்லது $x^2+y^2-2y-6=0$ ஆகும்.

$u=0$ என்னுங் கோடு $S=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொட்டால், $S=0$, $u=0$ என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து x அல்லது y யிற்குத் தீர்வு காணும்பொழுது இரண்டு பொருந்து மூலங்களைப் பெறுகின்றோம். ஆனால், இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறுந் தீர்வுகள் $S+\lambda u=0$, $u=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறுந் தீர்வுகளேயாகும்.

ஆகவே, $S+\lambda u=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு, $S=0$ என்னும் வட்டத்தை $u=0$ என்னுங் கோடு தொடும் புள்ளியில் அவ்வட்டத்தைத்தொடும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களின் பொது நாண்.

$S=0$, $S'=0$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக ; இங்கு,

$$S\equiv x^2+y^2+2gx+fy+c,$$

$$S'\equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'.$$

அவ்விரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள்

$$S-S'=0,$$

அல்லது $2(g-g')x+2(f-f')y+c'-c=0$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்.

இச்சமன்பாடு x,y என்பனவற்றிலே முதலாம் படியைக் கொண்டது ; ஆகவே, அது அவ்விரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லுங் கோட்டைக் குறிக்கும்.

அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், $S-S'=0$ என்னுங் கோடு அவற்றினது தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும். இக்கோடு $S=0$ என்னும் வட்டத்தை வேறு யாதும் புள்ளியில் வெட்டினால், அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $S=0$, $S-S'=0$ என்பனவற்றைத் தீர்க்கும் ; ஆகவே, அவை $S'=0$ என்பதையுந் தீர்க்கும் ; அதாவது, அப்புள்ளி அவ்விரு வட்டங்களின் ஒரு பொதுப் புள்ளியாதல் வேண்டும். அவ்விரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான தனிப்புள்ளி அவற்றினது தொடுபுள்ளி யாதலால், இது இயலாது. ஆகவே $S-S'=0$ என்னுங் கோடு $S=0$ என்னும் வட்டத்தை வேறோரிடத்திலும் வெட்டாது.

ஆகவே, அக்கோடானது $S=0$, $S'=0$ என்னும் இரு வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடலியாகும்.

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதற்குரிய நிபந்தனை.

x^2,y^2 என்பனவற்றின் குணகங்கள் 1 இற்குச் சமனாகவுள்ள $S=0$, $S'=0$ என்பன வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகும்.

ஆயின், $S-S'=0$ என்பது முதலாம் படியினுள்ள ஒரு சமன்பாடாகி ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கும். இந்நேர்கோடு $S=0$ என்னும் வட்டத்தை வெட்டினால், அவ்வெட்டும் புள்ளி ஒன்றின் ஆள்கூறுகள் $S=0$, $S-S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் ; ஆகவே, அவை $S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டையும் தீர்க்கும்; அதாவது அவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டும். அக்கோடு $S=0$ என்னும் வட்டத்தை வெட்டாதாயின், $S=0$, $S'=0$ என்னும் இரு சமன்பாடுகளையுந் தீர்க்கும் புள்ளி யாதும் இல்லை.

ஆகவே, $S-S'=0$ என்னுங்கோட்டிலிருந்து $S=0$ என்னும் வட்டத்தின் மையத்தினது தூரம் $S=0$ என்னும் வட்டத்தின் ஆரையினுஞ் சிறிது அல்லது அதற்குச் சமன் அல்லது அதினும் பெரிதாதற்கேற்ப, அவ்விரு வட்டங்களும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டும் அல்லது ஒன்றையொன்று தொடும் அல்லது ஒன்றையொன்று வெட்டா.

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் அல்லது வெட்டா என்பது அவ்விரு வட்டங்களின் ஆரைகளையும் அவற்றின் மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தையுங் கணித்தலாலே துணியப்படலாம். r_1, r_2 என்பன ஆரைகளாயும், d என்பது அம்மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரமாயுமிருந்தால், r_1, r_2, d என்னும் நீளப் பக்கங்களுடைய ஒரு முக்கோணி வரையக்கூடியதாயிருக்குமாயின், அவ்விரு வட்டங்களும் இரு வேறு வேறான புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டும். ஒரு முக்கோணியின் யாதுமொரு பக்கம் ஏனை யிருபக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையினும் சிறிதாயும் அவற்றின் வித்தியாசத்தினும் பெரிதாயுமிருத்தலால் $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ ஆயினாற்றான் இது முடியும்.

$|r_1-r_2|=d$ எனின், அவ்வட்டங்கள் உள்ளால் ஒன்றையொன்று தொடும் ; $r_1+r_2=d$ எனின், அவை வெளியால் ஒன்றையொன்று தொடும்.

$r_1+r_2<d$ எனின், அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாது ஒன்றுக்கொன்று வெளியாற் கிடக்கும்.

$|r_1-r_2|>d$ எனின், அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா ; சிறு வட்டம் பெருவட்டத்திற்குட் கிடக்கும்.

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்.

x^2, y^2 என்னும் ஒவ்வொன்றின் குணகம் 1 இற்குச் சமனுயுள்ள $S=0$, $S'=0$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக.

λ என்பது -1 இற்குச் சமனுகாது x, y என்பனவற்றைச் சாராதுள்ள $S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை ஆராய்க. அது இரண்டாம் படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு; முழுவதையும் $1+\lambda$ ஆல் வகுத்தபின்

$$x^2+y^2+2px+2qy+r=0$$

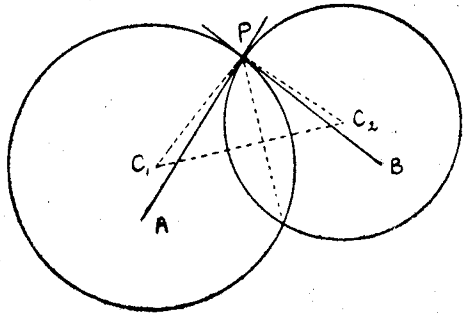
என்னும் வடிவத்திலே அதனை எழுதலாம்; இங்கு p, q, r என்பன x, y என்பனவற்றைச் சாராதிருக்கின்றன. ஆகவே, அச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். $S=0$, $S'=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்.

ஆகவே, $S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு -1 இற்குச் சமனுகாத λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $S=0$, $S'=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$\lambda=-1$ ஆகும்பொழுது, அச் சமன்பாடு அவ்விரு வட்டங்களின் பொது நாணைக் குறிக்கும்.

$S=0$, $S'=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், $S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு இரு வட்டங்களை அவற்றின் பொதுத் தொடு புள்ளியிலே தொடும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களின் வெட்டுக் கோணம்.



P என்பது இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்றுக; PA, PB என்பன அவ்வட்டங்களுக்கு P யிலுள்ள தொடலிகளாகுக. அவ்வட்டங்களின் பொதுநாணை அமைக்கின்ற PA, PB என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் அவ்வட்டங்களின் வெட்டுக் கோணம் எனப்படும். θ என்பது இக்கோணமாயும் C_1, C_2 என்பன அவ்வட்டங்களின் மையங்களாயுமிருந்தால், $\angle C_1PC_2=\pi-\theta$ என்பது எளிதிற் புலப்படும்.

r_1, r_2 என்பன அவ்வட்டங்களின் ஆரைகளாயும், d என்பது அவற்றின் மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரமாயுமிருந்தால்,

$$\text{கோசை } (\pi-\theta)=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$$

அல்லது

$$\text{கோசை } \theta=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}.$$

செங்குத்துவெட்டு.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களின் வெட்டுக் கோணம் $\frac{\pi}{2}$ ஆயின், அவ்வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன எனப்படும். முன்னுருவத்திலுள்ள வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டினால், $\angle C_1PC_2$ ஒரு செங்கோணமாகும்; ஆயின், $d^2=r_1^2+r_2^2$. மறுதலையாக, $d^2=r_1^2+r_2^2$ எனின், அவ்வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டும்.

அவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \text{ என்பனவாகுக.}$$

மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தின் வர்க்கம் $(g_1-g_2)^2+(f_1-f_2)^2$ ஆகும். ஆகவே, அவ்வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டுதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை

$$(g_1-g_2)^2+(f_1-f_2)^2=g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2$$

அல்லது $$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2 \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு வட்டப்பரிதியை இருகூறிடும் வட்டங்கள்.

ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ஆகுக. ஆயின் அதன் மையம் $(-g,-f)$ என்னும் புள்ளியாகும். l, m என்பன எவையேனும் மாறிலிகளாயின் $l(x+g)+m(y+f)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு இப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். ஆகவே இக்கோடு இவ்வட்டப்பரிதியை இருகூறிடும்; ஏனெனின் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் A,B யாயின் AB யானது வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும்.

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c+l(x+g)+m(y+f)=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடு A,B என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். ஆகவே l,m என்பன ஏதேச்சை மாறிலிகளாக, இச்சமன்பாடு தொடக்க வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். அத்தகைய எவ்வட்டமும் இவ்வடிவத்திலுள்ள சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c=0$ என்னும் வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுவதற்கு நிபந்தனை எளிதிற் பெறப்படும்.

$(x^2+y^2+2g'x+2f'y+c') \equiv (x^2+y^2+2gx+2fy+c)+2(g'-g)x+2(f'-f)y+c'-c$ ஆதலால் $2(g'-g)x+2(f'-f)y+c'-c=0$ என்னும் நேர்கோடு $(-g, -f)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லல் வேண்டும். ஆகவே $-2(g'-g)g-2(f'-f)f+c'-c=0$ ஆகவேண்டும்.

உ-ம். $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-4x-5=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றின் பரிதியையும் இருகூறிட்டு $x^2+y^2-2x-3y-2=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2+y^2-1=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடும் வட்டம் எதுவேனும் $x^2+y^2+2lx+2my-1=0$ என்னுமொரு சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$(x^2+y^2+2lx+2my-1)-(x^2+y^2-4x-5) \equiv (2l+4)x+2my+4$ ஆதலால் இவ்வட்டம் $x^2+y^2-4x-5=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுதற்கு

$$(2l+4)2+4=0$$

ஆகவேண்டும்; அதாவது $l=-3$ ஆகவேண்டும். ஆகவே $x^2+y^2-6x+2my-1=0$ என்னும் வட்டம் தந்த முதல் இருவட்டங்கள் ஒவ்வொன்றின் பரிதியையும் இருகூறிடும். இவ்வட்டம் $x^2+y^2-2x-3y-2=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுதற்கு $2(-3)(-1)+2m(-\frac{3}{2})=-1-2$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது $m=3$

ஆகவே வேண்டிய சமன்பாடு $x^2+y^2-6x+6y-1=0$.

ஒரு வட்டத்தைக் குறித்து ஒரு புள்ளியின் வலு.

$P(x_1, y_1)$ என்பது $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தினது தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கும் ஒரு கோடு P யிற்கூடாக வரையப்படுக. r என்பது P யிலிருந்து OX ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குந் திசையில் அளக்கப்பட்ட அப்புள்ளியினது தூரமாயின், இக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $x_1 + r$ கோசை θ, $y_1 + r$ சைன் θ என்பனவாகும். இப்புள்ளி அவ்வட்டத்தின்மீது கிடந்தால்,

$$(x_1 + r\,\text{கோசை}\,\theta)^2 + (y_1 + r\,\text{சைன்}\,\theta)^2 + 2g(x_1 + r\,\text{கோசை}\,\theta) + 2f(y_1 + r\,\text{சைன்}\,\theta) + c = 0$$

$$\therefore \quad r^2 + 2r(x_1\,\text{கோசை}\,\theta + y_1\,\text{சைன்}\,\theta + g\,\text{கோசை}\,\theta + f\,\text{சைன்}\,\theta) + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$$

இது r இலுள்ள ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. அக்கோடு அவ்வட்டத்தை இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகள் Q, R என்பனவற்றில் வெட்டினால் இந்த இருபடிச் சமன்பாடு (தம் செவ்விய குறிகளோடு கூடிய) PQ, PR என்னுந் தூரங்களாகிய இரண்டு வேறு வேறான மெய்ப்பெறுமானங்களை

இற்குக் கொடுக்கின்றது. r இற்குரிய இரு மூலங்களின் பெருக்கம்

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$\therefore \quad PQ.PR = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

ஆகவே, அவ்வட்டத்தை Q, R என்னும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுதற்கு P யிற்கூடாக யாதுமொரு கோடு வரையப்பட்டால், $PQ.PR$ என்னும் பெருக்கத்திற்கு $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ என்னும் ஒரு மாறுப் பெறுமானம் உண்டு. அவ்வட்டத்தையும் P என்னும் புள்ளியினது நிலையையுமே சார்ந்த இம்மாறுப் பெறுமானம் அவ்வட்டத்தைக் குறித்து P யின் வலு எனப்படும். P என்பது அவ்வட்டத்திற்கு வெளியால் இருந்தால், PQ, PR என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி இருக்கும்; ஆயின் வலு நேராகும். Q, R என்பன பொருந்தும்போது P யிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலி எல்லையுறுமாதலால், P யின் வலு P யிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலியினது நீளத்தின் வர்க்கமாகும். P என்பது அவ்வட்டத்தின் மீதே கிடந்தால், Q, R என்னும் புள்ளிகளுள் ஒன்று P யோடு பொருந்தும்; ஆயின், வலு பூச்சியமாகும். P என்பது அவ்வட்டத்திற்குட் கிடந்தால், PQ, PR என்பனவற்றிற்கு முரண்குறிகள் இருக்கும்; ஆயின், P யின் வலு மறையாகும்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ என்பது மறை அல்லது நேர் ஆதற்கேற்ப, (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு உள்ளே அல்லது வெளியே கிடக்குமென முன்னர் கண்டுள்ளோம்.

இரு வட்டங்களின் சமத்தொடலியச்சு.

$$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

$$S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c=0$$

என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக. (x_1, y_1) என்பது அவ்விரு வட்டங்களையுங் குறித்து ஒரே வலுவுள்ள புள்ளியாயின்,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = x_1^2 + y_1^2 + 2g'x_1 + 2f'y_1 + c$$

$$\therefore \quad 2(g-g')x_1 + 2(f-f')y_1 + c - c' = 0$$

$\therefore$ அவ்விரு வட்டங்களையுங் குறித்து ஒரே வலுவுள்ள புள்ளியின் ஆள் கூறுகள்

$$2(g-g')x + 2(f-f')y + c - c' = 0.$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்.

இது x, y என்பனவற்றிலே முதலாம் படியிலுள்ள சமன்பாடாய் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

7—R11681 (1/66)

ஆகவே, $S=0$, $S'=0$ என்னும் வட்டங்களைக் குறித்து ஒரே வலுவுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு $S-S'=0$ என்னும் நேர்கோடாகும். இக்கோடு அவ்விரு வட்டங்களின் **சமத்தொடலியச்சு** எனப்படும். அவ்வட்டங்கள் இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டினால், சமத்தொடலியச்சு அவ்வட்டங்களின் பொதுநாணாகும். அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், சமத்தொடலியச்சு அவற்றின் பொதுத் தொடலியாகும். அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாவாயின், சமத் தொடலியச்சு அவ்விரு வட்டங்களுள் ஒன்றையாதல் வெட்டாத ஒரு கோடாகும்.

பொதுவச்சு வட்டங்கள்.

$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாயும் $u\equiv lx+my+n=0$ என்பது ஒரு கோட்டின் சமன்பாடாயுமிருக்க. λ என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராதிருக்கும் $S+\lambda u=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை ஆராய்க. இவ்வட்டத்தைக் குறித்து (x_1, y_1) என்னும் ஒரு புள்ளியின் வலு

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c+\lambda(lx_1+my_1+n) \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி $u=0$ என்னுங் கோட்டின்மீது கிடந்தால், $S+\lambda u=0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறித்து அப்புள்ளியின் வலு $S=0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறித்து அதன் வலுவோடு ஒன்றாகும்.

ஆகவே, λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $S+\lambda u=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்; இவ்வட்டம், $S=0$ என்னும் வட்டம் ஆகிய இரண்டினதுஞ் சமத்தொடலியச்சு $u=0$ என்னுங் கோடாகும். λ இன் வேறு பெறுமானங்களுக்குப் பெறும் வட்டங்கள் $u=0$ என்னும் சமத்தொடலியச்சோடு கூடிய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியை ஆக்குமெனப்படும்.

$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $S'\equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக. $\lambda=-1$ ஆயின், $S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு அவ்விரு வட்டங்களின் சமத்தொடலியச்சைக் குறிக்கும். u என்பது $S-S'$ என்பதைக் குறிக்க; ஆயின், $u=0$ என்பது சமத் தொடலியச்சின் சமன்பாடாகும்.

$$\lambda\neq-1 \text{ எனின், } S+\lambda S'=S+\lambda(S-u)=(1+\lambda)\left(S-\frac{\lambda u}{1+\lambda}\right) \text{ ஆகவே,}$$

$S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $S-\dfrac{\lambda u}{1+\lambda}=0$ என்பதனோடு ஒன்றாகும்.

ஆகவே, -1 இற்குச் சமனாகாத λ இன் வேறு வேறு பெறுமானங்களுக்கு, $S+\lambda S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $S=0$, $S'=0$ என்னும் வட்டங்கள் உறுப்புக்களாயுள்ள ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதியும் அவ்வாறு வெட்டாப் பொதுவச்சுத் தொகுதியும்.

ஒரு பொது வச்சுத் தொகுதியின் சமத்தொடலியச்சு அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தை P என்னும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால், அத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்தைக் குறித்து P யின் வலு பூச்சியமாகும். ஆகவே, அத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டமும் P யிற் கூடாகச் செல்ல வேண்டும்.

ஆகவே பொதுச் சமத்தொடலியச்சு அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தை A, B என்னும் இரண்டு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டினால், அத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு பிற வட்டமும் A, B என்னும் இந்த இரண்டு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்ல வேண்டும். அப்பொழுது சமத்தொடலியச்சு அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தை A என்னும் ஒரு புள்ளியிலே தொட்டால், அது அத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் ஒரே புள்ளி A யிலே தொடவேண்டும். அப்பொதுச் சமத்தொடலியச்சு அத் தொகுதியின் ஒரு குறித்த வட்டத்தை வெட்டாதாயின், அது அத் தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்தையும் வெட்ட முடியாது. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் பொது வெட்டுப் புள்ளிகள் A, B என்பன இருக்கும்பொழுது, எல்லா வட்டங்களினதும் மையங்கள் AB யின் செங்குத்து இருகூறாக்கியாகிய ஒரே நேர் கோட்டிற் கிடக்குமென தூய கேத்திர கணிதத்திலிருந்து பெறப்படும். அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று ஒரே புள்ளியிலே தொட்டால், அவ்வட்டங்களின் மையங்கள் சமத்தொடலியச்சிற்குச் செங்குத்தாகிய பொதுத் தொடு புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்ற நேர் கோட்டின் மீது கிடக்கும். அவ்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாத பொழுதும் அவற்றின் மையங்கள் அவற்றின் பொதுச் சமத்தொடலியச்சிற்குச் செங்குத்தான ஒரே நேர்கோட்டின் மீது கிடக்குமென எளிதாக நிறுவப்படலாம்.

ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எவையேனும் இரு வட்டங்கள்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$
$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுக.

அவற்றின் மையங்களைத் தொடுக்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y+f)(g-g')-(x+g)(f-f')=0.$$

சமத்தொடலியச்சின் சமன்பாடு

$$2x(g-g')+2y(f-f')+c-c'=0.$$

இந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

ஆகவே, ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களின் மையங்களும் அவற்றின் பொதுச் சமத்தொடலியச்சிற்குச் செங்குத்தான ஒரே நேர் கோட்டிற் கிடத்தல் வேண்டும்.

ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியினது நியமச் சமன்பாடு.

யாதுமொரு பொதுவச்சுத் தொகுதியை எடுக்க. பொதுச் சமத தொடலியச்சும் மையமிணைகோடும் இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளாகும். x அச்சாக மையமிணை கோட்டையும் y அச்சாகப் பொதுச் சமத்தொடலி யச்சையும் எடுக்கின்றேமெனக் கொள்க. அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் ஆள்கூறுகள் $(\lambda, 0)$ ஆகும்; இங்கு, λ என்பது அவ்வட்டத்தோடு மாறும்.

ஆகவே, அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0 \text{ ஆகும்;}$$

இங்கு c என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராது λ என்பதைச் சார்ந்துமிருக்கலாஞ் சாராதுமிருக்கலாம்.

உற்பத்தித்தானஞ் சமத்தொடலியச்சின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாதலின், அத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்தைக் குறித்து அதன் வலு ஒன்றுயிருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே, c என்பது λ ஐச் சாராது வட்டங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒன்றுகும். ஆகவே, பொதுவச்சுத் தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0 \quad \text{ஆகும்;}$$

இங்கு λ என்பது ஒரு மாறும் பராமானமாயும் c என்பது ஒரு மாறிலியாயும் இருக்கும்.

பொதுத்தொடலியச்சு $x=0$ எனுங் கோடாகும்;

ஆகவே, $y^2 + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு y யிற்கு மெய்மூலங்களைத் தந்தாற்றான், பொதுத்தொடலியச்சு அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தை வெட்டும்.

ஆகவே, $c < 0$ எனின், அவ்வட்டங்களுக்கு இரண்டு பொது வெட்டுப் புள்ளிகள் இருக்கும்; $c = 0$ எனின், அவை ஒன்றையொன்று தொடும்; $c > 0$ எனின், அவை ஒன்றையொன்று வெட்டா.

ஒன்றையொன்று வெட்டாப் பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள்.

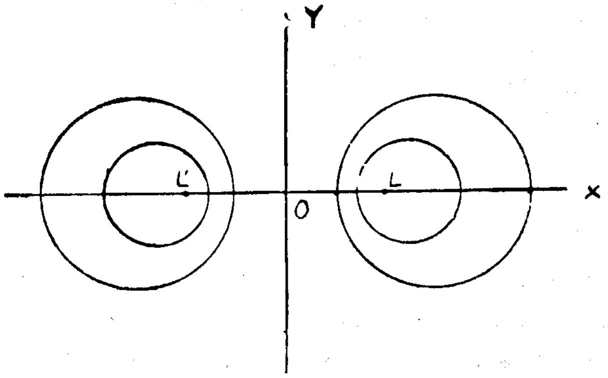
λ என்பது ஒரு மாறும் பராமானமாயும் c என்பது ஒரு நேர் மாறிலியாயுமுள்ள $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்ட ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்களை ஆராய்க.

அச்சமன்பாடு

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - c \text{ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.}$$

$\lambda^2 < c$ எனின், இச்சமன்பாடு பொருள்படாது.

ஆகவே, $\lambda^2 \geq c$ ஆகுமாறு λ இன் பெறுமானங்களுக்கே, அத்தொகுதியின் வட்டங்கள் பெறப்படலாம். $\lambda^2 > c$ எனின், $\sqrt{(\lambda^2 - c)}$ என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தைப் பெறுவோம். $\lambda^2 = c$ எனின், பூச்சிய ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தை அல்லது $(\lambda, 0)$ என்னும் புள்ளியில் ஒரு புள்ளி வட்டத்தைப் பெறுவோம். $\lambda^2 = c$ என்னுஞ் சமன்பாடு λ இற்கு இரு பெறுமானங்களைக் கொடுத்தலால், அத்தொகுதியின் இரண்டு புள்ளி வட்டங்களை $(\sqrt{c}, o)$, $(-\sqrt{c}, o)$ என்னும் புள்ளிகளிற் பெறுவோம். இப்புள்ளிகள் அப்பொது வச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் எனப்படும். அவை பொதுத் தொடலியச்சிற்குச் சமச்சீராய் நிலை கொள்ளும்.



L, L' என்பன எல்லைப் புள்ளிகளாயின், அப்பொது வச்சுத் தொகுதியின் ஒரு வட்டத்திற்கும் அதன் மையம் L, L' என்பனவற்றிற்கு இடையில் இராது.

$L=(\sqrt{c}, \ 0)$ எனின், அச்சமத்தொடலியச்சின் L இருக்கும் அதே பக்கத்திற் கிடக்கின்ற வட்டங்கள் $\lambda\,(>\sqrt{c})$ இனுடைய நேர்ப்பெறுமானங்களாலே தரப்படும். $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ என்பது அத்தகை வட்டமொன்றின் சமன்பாடாகுக. $x^2 + y^2 - 2\lambda x + c$ என்பதில் $x = +\sqrt{c}$, $y = 0$ எனப் பிரதியிட்டால், மறைக்குறியோடு கூடிய $2\sqrt{c}\,(\sqrt{c} - \lambda)$ என்பதைப் பெறுவோம்.

ஆகவே, L என்பது அத்தகை வட்டம் ஒவ்வொன்றிற்குள்ளுங் கிடக்கும். அதுபோல, அச்சமத்தொடலியச்சின் L' ஐப் போல அதே பக்கத்திற் கிடக்கின்ற அத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்குள்ளும் L' கிடக்கும்.

அப்பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், அத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் பொதுத் தொடு புள்ளியோடு பொருந்தும்.

அத்தொகுதியின் வட்டங்கள் இரண்டு வேறுவேறன புள்ளிகளில் வெட்டினல், அத்தொகுதிக்கு எல்லைப் புள்ளிகள் இல்லை.

உ-ம். A, B என்பன ஒரு தளத்தில் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளாயும் P என்பது $\frac{PA}{PB}=k$ (மாறிலி) ஆகவுள்ள ஒருமாறும் புள்ளியாயும் இருந்தால், P யின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகுமென்றும் k இன் வேறு வேறு, பெறுமானங்களுக்குப் பெறும் வட்டங்கள் A, B என்பனவற்றில் எல்லைப் புள்ளிகளுள்ள ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியை ஆக்குமென்றுங் காட்டுக.

அத்தளத்தில் எவையேனுஞ் செவ்வக வச்சுக்களை எடுக்க ; (a, b) (c,d) என்பன இவ்வச்சுக்கள் பற்றி எடுத்த A, B என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகளாகுக. (x, y) என்பன P என்னும் மாறும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளாயின்,

$$k^2=\frac{PA^2}{PB^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

அல்லது $\quad (x-a)^2+(y-b)^2-k^2[(x-c)^2+(y-d)^2]=0.$

x^2, y^2 என்பனவற்றின் ஆள்கூறுகள் சமனுதலாலும், xy யில் ஒருறுப்பும் இல்லாததனுலும், இச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$S\equiv(x-a)^2+(y-b)^2 \text{ ஆயும், } \quad S'\equiv(x-c)^2+(y-d)^2$$

ஆயுமிருந்தால், அச்சமன்பாடு $S-k^2S'-=0$ என்பதாகும்.

$S=0$, $S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் இரண்டு புள்ளி வட்டங்களைக் குறிக்கும். ஆகவே, k இன் வேறு வேறன பெறுமானங்களுக்கு $S-k^2S'=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு அவ்விரண்டு புள்ளி வட்டங்களும் உறுப்புக்களாயுள்ள ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும். ஆகவே, அத்தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டாத வட்டங்களுடையனவாயிருக்கும் ; அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் A,B என்பனவற்றில் இருக்கும்.

செங்குத்துப் பொதுவச்சுத் தொகுதி

λ என்பது ஒரு மாறும் பராமானமாயுள்ள $x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியை ஆராய்க.

$C(o,p)$ என்பது அவ்வட்டங்களுக்கு வெளியே சமத்தொடலியச்சின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. C யிலிருந்து அத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்திற்கு வரைந்த ஒரு தொடலியினது நீளத்தின் வர்க்கம் p^2+c ஆகும்.

ஆகவே, மையம் C யாகவும் ஆரை $\sqrt{(p^2+c)}$ ஆகவுமுள்ள வட்டம் அப் பொதுவச்சுத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டத்தையுஞ் செங்குத்தாக வெட்டும்.

இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+(y-p)^2=p^2+c,$$

அல்லது $$x^2+y^2-2py-c=0.$$

p யின் வேறுவேறு பெறுமானங்களுக்கு, y அச்சை மையமிணை கோடாயும் x அச்சைப் பொதுச் சமத்தொடலியச்சாயுமுள்ள ஒரு பொது வச்சு வட்டத் தொகுதியை இச்சமன்பாடு தரும்.

ஆரம்பத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டும் வட்டங்களையுடையனவாயின், செங்குத்துத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டா வட்டங்களையுடையனவாகும் ; ஆரம்பத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டா வட்டங்களையுடையனவாயின், செங்குத்துத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டும் வட்டங்களையுடையனவாகும். ஆரம்பத் தொகுதியின் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமாயின், செங்குத்துத் தொகுதியின் வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடும்.

பயிற்சி 14.

1. $x^2+y^2=4$, $2x^2+2y^2-3x+y-3=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமெனக் காட்டுக ; அவற்றின் பொது நாணின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

2. $x^2+y^2=4$, $2x^2+2y^2-3x+y-3=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று $x^2+y^2+2x-1=0$ என்னும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $x^2+y^2=4$ என்னும் வட்டமும் $x+y-1=0$ என்னுங்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு மாறும் வட்டஞ் சென்று $x^2+y^2-2x-1=0$ என்னும் வட்டத்தை P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. PQ வானது என்றும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக ; இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

4. ஒரு மாறும் வட்டம் A, B என்னும் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று வேறொரு நிலையான வட்டத்தை வெட்டுகின்றது ; அவ்விரு வட்டங்களின் பொது நாண் A, B என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுங் கோட்டின்மீது கிடக்கின்ற ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் அல்லது AB யிற்குச் சமாந்தரமாயிருக்குமெனக் காட்டுக.

5. மூன்று வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே நேர் கோட்டில் இல்லையாயின், அவ்வட்டங்களின் சமத்தொடலியச்சுக்கள் சோடி சோடியாக எடுக்கப்பட ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும்.

6. $x^2+y^2+2\lambda(x+y-3)-4=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு λ இன் வேறு வேறு பெறுமானங்களுக்கு ஒன்றையொன்று வெட்டாப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக ; அவற்றின் எல்லைப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

7. ஒரு வட்டத்தின் மையம் y அச்சின்மீது இருக்கின்றது. அவ்வட்டத்தைக் குறித்து x அச்சின் மீதுள்ள P என்னும் ஒரு மாறும் புள்ளியினது தொடு நாண் x அச்சை Q விற் சந்திக்கின்றது. PQ என்பதை விட்டமாகவுள்ள வட்டம் y அச்சைப் பொதுச் சமத்தொடலியச்சாகவுள்ள ஒரு நிலையான பொது வச்சுத் தொகுதியின் ஓர் உறுப்பாகுமெனக் காட்டுக. ஆரம்ப வட்டம் x அச்சை வெட்டுகிறது அல்லது வெட்டுகிறதில்லை என்பதற்கேற்ப அப்பொது வச்சுத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டாத வட்டங்களுடையன அல்லது வெட்டுகின்ற வட்டங்களுடையன என்றுங் காட்டுக.

√**8.** $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-x-3=0$, $x^2+y^2-y-4=0$ என்னும் மூன்று வட்டங்களுள் ஒவ்வொன்றையும் செங்குத்தாக, வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

√**9.** (1,1), (−1,0) என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் $x^2+y^2=4$ வட்டத்தை P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. P, Q என்பனவற்றில் இரண்டாம் வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலிகள் R இல் ஒன்றையொன்று வெட்டினுல், R என்பது $5x+3y-4=0$ என்னுங் கோட்டின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

√**10.** ஆள்கூற்றச்சுக்கள் இரண்டையுந் தொடும் வட்டங்கள் நான்கு $2(x^2+y^2)+x-4y=2$ என்னும் வட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகுமென்று நிறுவுக ; அவற்றின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

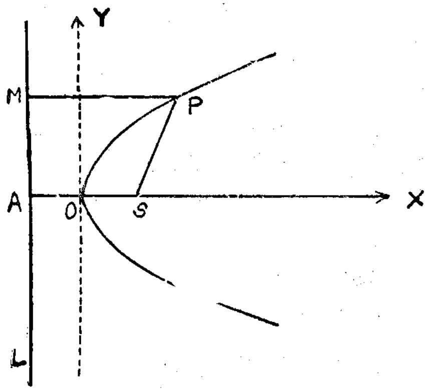
√**11.** $x^2+y^2+2x-2y=0$, $x^2+y^2-2x+2y=0$ என்னும் இரு வட்டங்களுக்கும் மூன்று பொதுத் தொடலிகள் மாத்திரம் உண்டு எனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

அத்தியாயம் 5

பரவளைவு

வரைவிலக்கணம்.

l என்பது ஒரு தளத்திலேயுள்ள ஒரு நிலையான கோடாகுக ; S என்பது அத்தளத்தில் l இன்மீது கிடவாத ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக. P என்பது அத்தளத்தில் l இற்கு S இருக்கும் அதே பக்கத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாகுக ; M என்பது P யிலிருந்து l இன்மீது வரைந்த செங்குத்தின் அடியாகுக. P என்பது $\frac{SP}{\mathrm{PM}}=1$ ஆகுமாறு இயங்கினுல், P யின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு என வரையறுக்கப்படுகின்றது.



SA என்பதை l இற்குச் செங்குத்தாக l ஐ A யிற் சந்திக்கும்படி வரைக. O என்பது SA யின் மையமாகுக. OS என்பதை x அச்சினது நேர்த் திசையாகவும் l இற்குச் சமாந்தரமாய் O விற்கூடாகச் செல்லுங் கோட்டை y அச்சாகவும் எடுக்க. $OS=a$ ஆகுக.

$P=(x,y)$ எனின்,

$$SP^2=(x-a)^2+y^2.$$

$$PM^2=(x+a)^2$$

$$\therefore (x+a)^2=(x-a)^2+y^2.$$

$$\therefore y^2=4ax.$$

இது OX, OY என்பனவற்றை x, y என்னும் அச்சுக்களாகக் குறித்து வரைந்த பரவளைவின் சமன்பாடாகும். S என்னும் புள்ளி அப்பரவளைவின் **குவியம்** என்றும் அக்கோடு **செலுத்தி** என்றுங் கூறப்படும். அவ்வளையி முழுவதும் y அச்சினது நேர்ப்பக்கத்திற் கிடக்கும் ; அது உற்பத்தித் தானத்திற்கூடாகச் செல்லும். அது OX பற்றிச் சமச்சீராயிருக்கும் ; OX இற்கு மேலுங் கீழுமுள்ள அதனுடைய கிளைகள் $y=2\sqrt{(ax)}$, $y=-2\sqrt{(ax)}$ என்பனவற்றுலே தரப்படும். OX என்பது அப் பரவளைவின் **அச்சு** என்றும் O என்பது அதன் **உச்சி** என்றுங் கூறப்படும்.

S இற்கூடாக OX இற்குச் செங்குத்தாயுள்ள அப்பரவளைவினது நாண் **செவ்வகலம்** எனப்படும்.

x என்பது மிகப் பெரிதாயிருக்கும்பொழுது, y^2 என்பதும் மிகப் பெரிதாகும்; ஆயின், அவ்வளையி முடிவில்லாததாகும். அதற்கு இரண்டு முடிவில் கிளைகள் இருக்கும்.

ஒரு நாணின் சமன்பாடு.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்பன $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளாகுக.

$yy_1 - 2a(x+x_1) + yy_2 - 2a(x+x_2) - y_1y_2 + 2a(x_1+x_2) = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை ஆராய்க. அது x, y என்பனவற்றிலே முதலாம் படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு. ஆகவே, அது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். $y_1^2 - 4ax_1=0$ ஆதலால், $x=x_1$, $y=y_1$ ஆகும்பொழுது அச்சமன்பாடு தீர்க்கப்படும்.

$x=x_2$, $y=y_2$ ஆகும்பொழுதும் அச்சமன்பாடு தீர்க்கப்படும். ஆகவே அச்சமன்பாடு (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணைக் குறிக்கும்.

x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு.

(x_1, y_1) என்னும் புள்ளியானது அப்பரவளைவின்மீது நிலையாயிருக்க (x_2, y_2) என்னும் புள்ளியானது (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியோடு பொருந்தும்படி அப்பரவளைவினது நீளத்திற்கு இயங்குகின்றதெனக் கொண்டால், அவ்விரு புள்ளிகளையுந் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$yy_1 - 2a(x+x_1) + yy_1 - 2a(x+x_1) - y_1^2 + 4a\,x_1 = 0.$$

அல்லது
$$yy_1 - 2a(x+x_1) = 0$$

என்னும் வடிவத்தை அணுகும்.

(x_2, y_2) என்பது (x_1, y_1) ஓடு பொருந்தும்போது எல்லை நிலையிலுள்ள நாண் அப்பரவளைவிற்கு (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியாகும்.

ஆகவே, அப்பரவளைவிற்கு (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $yy_1 - 2a(x+x_1) = 0$ ஆகும். அவ்வளையியின் சமன்பாடு $yy = 2a(x+x)$ என எழுதப்படின், (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு y என்பதிலொன்றை y_1 ஆலும் x என்பதிலொன்றை x_1 ஆலும் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படும்.

பராமான வகைக்குறிப்பு.

$x = at^2$, $y = 2at$ எனின், $y^2 - 4ax = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்குந் தீர்க்கப்படும். ஆகவே, t என்பது ஒரு மாறுஞ் பராமானமாயின், அப்பரவளைவின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(at^2, 2at)$ என உணர்த்தப்படலாம். $t=0$ ஆகும்பொழுது அப்பரவளைவின் உச்சி பெறப்படும். t இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு x அச்சிற்கு மேலேயுள்ள கிளையின் மீதுள்ள புள்ளிகளையும் அதன் மறைப்பெறுமானங்களுக்கு x அச்சிற்குக் கீழேயுள்ள கிளையின் மீதுள்ள புள்ளிகளையும் பெறுவோம்.

ஒரு நாணின் சமன்பாடு.

t_1, t_2 என்பன அப்பரவளைவின் மீதுள்ள P_1, P_2 என்னும் இரு புள்ளிகளின் பராமானங்களாகுக. P_1, P_2 என்பனவற்றைத் தொடுக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - 2at_1)(at_2^2 - at_1^2) = (x - at_1^2)(2at_2 - 2at_1).$$

$t_1 - t_2$ என்பது பூச்சியமல்லாததாயிருத்தலால், அச்சமன்பாடு

$$(y - 2at_1)\,a\,(t_2+t_1) = (x - at_1^2)2a,$$

அல்லது
$$(t_1+t_2)\,y = 2x + 2at_1t_2$$

என எழுதப்படலாம்.

$(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலி.

t_2 என்பது t_1 என்பதை அணுக, அப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாடு
$$2t_1y = 2x + 2at_1^2$$
என்னும் வடிவத்தை அணுகும்.

ஆகவே, அப்பாவளைவிற்கு $(at_1^2, 2at_1)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $t_1y = x + at_1^2$.

ஆகவே, $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலி $ty = x + at^2$. $t = 0$ எனப் பிரதியிட, உச்சியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை $x = 0$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுகின்றோம்.

ஆகவே, y அச்சே உச்சியிலுள்ள தொடலியாகும்.

இரு தொடலிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்.

"t_1", "t_2" என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் ஒன்றையொன்று $(\bar{x}, \bar{y})$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டுக.

ஆயின்,
$$t_1\bar{y} = \bar{x} + at_1^2;$$
$$t_2\bar{y} = \bar{x} + at_2^2.$$
$$\therefore\quad (t_1 - t_2)\bar{y} = a(t_1^2 - t_2^2)$$

$\therefore$ $t_1 - t_2$ என்பது பூச்சியமல்லாததால்,

$$\bar{y} = a(t_1 + t_2)$$
$$\therefore\quad \bar{x} = at_1(t_1+t_2) - at_1^2 = at_1t_2.$$

ஆகவே, அத்தொடலிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி

$$[at_1t_2,\ a(t_1+t_2)]$$

அவ்விரு தொடலிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயின, $t_1t_2 = -1$.

ஆகவே, இரு செங்குத்துத் தொடலிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $x = -a$ என்னுங் கோடாகும் ; இது அப்பரவளைவின் செலுத்தியாகும்.

தொடுநாண்.

(x_1, y_1) என்பது $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவினது தளத்திலேயுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. அப்பரவளைவிற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலி (x_1, y_1) இற் கூடாகச் சென்றால், $ty_1 = x_1 + at^2$. புள்ளி (x_1, y_1) என்பது தரப்படும்பொழுது, இது t இலுள்ள ஓர் இரு படிச் சமன்பாடாகி t இற்கு இரு பெறுமானங்களுக்கு மேலே தராது. $y_1^2 > 4ax_1$ எனின், அச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் வேறு வேறும் மெய்யாயுமிருக்கும் ; $y_1^2 = 4ax_1$ எனின், அவை ஒன்றோடொன்று பொருந்தும் ; $y_1^2 > 4ax_1$ எனின் மெய்மூலங்களில்லை. ஆகவே, (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி அப்பரவளைவிற்கு வெளியாற் கிடந்தால், இரண்டு வேறு வேறான தொடலிகள் இப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்படலாம் ; அது அப்பரவளைவிற்குட் கிடந்தால் ஒரு தொடலியையுங் கீறுதல் இயலாது. அப்பரவளைவு (x, y) என்னுந் தளத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் ; அப்பரவளைவின் அச்சைக் கொள்ளுகின்ற பகுதி அப்பரவளைவிற்குள்ளே கிடக்கின்றதென்றும் மற்றைப் பகுதி அதற்கு வெளியே கிடக்கின்றதென்றுங் கூறப்படும். (x_1, y_1) என்பது அப்பரவளைவிற்கு வெளியே கிடக்க, t_1, t_2 என்பன (x_1, y_1) இலிருந்து வரைந்த இரு தொடலிகளினுடைய தொடு புள்ளிகளின் பராமானங்களாயிருந்தால், t_1, t_2 என்பன

$$at^2 - ty_1 + x_1 = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = y_1/a, \; t_1 t_2 = \frac{x_1}{a}.$$

இம்முடிபுகள் வேறு வழியால் இதற்கு முன்னே பெறப்பட்டன.

" t_1 ", " t_2 " என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$(t_1 + t_2)y = 2x + 2at_1t_2,$$

அல்லது

$$\frac{y_1 y}{a} = 2x + 2x_1.$$

ஆகவே, (x_1, y_1) இலிருந்து வரையுந் தொடலிகளினுடைய தொடு நாணின் சமன்பாடு $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

இம்முடிவு ஒரு வட்டத்திற்கு வழங்கிய வழியாலும் பெறப்படலாம்.

ஒரு புள்ளியிலுள்ள செவ்வன்.

ஒரு பரவளைவின் P என்னும் ஒரு புள்ளிக்கூடாக அப்புள்ளியிலுள்ள தொடலிக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு P யிலுள்ள **செவ்வன்** எனப்படும்.

$P \equiv (at^2, 2at)$ எனின், P யிலுள்ள தொடலி

$$ty = x + at^2$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

ஆகவே, P யிலுள்ள செவ்வன்

$$y + tx = 2at + at^3$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

பரவளைவினுடைய சில இயல்புகள்.

1. குவியத்திலிருந்து பரவளைவின் ஒரு தொடலிக்கு வரையுஞ் செங்குத்தின் அடி உச்சியிலுள்ள தொடலியின்மீது கிடக்கும்.

ஒரு தொடலியின் சமன்பாடு $ty = x + at^2$...................(1).

குவியமானது (a, o) என்னும் புள்ளி.

ஆகவே, (a, o) இலிருந்து அத்தொடலிக்கு வரையுஞ் செவ்வனின் சமன்பாடு $y + tx = at$.....................(2).

$x = 0$, $y = at$ ஆகும்பொழுது (1), (2) என்னுஞ் சமன்பாடுகளானவை தீர்க்கப்படும். ஆகவே, குவியத்திலிருந்து அத்தொடலியின்மீது வரையப்படுஞ் செங்குத்தின் அடிக்கு (o, at) என்னும் ஆள்கூறுகள் உண்டு.

ஆகவே, அது உச்சியிலுள்ள தொடலியாகிய y அச்சின்மீது கிடக்கும்.

2. ஒரு பரவளைவிலுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடலியானது செலுத்தியை M இற் சந்தித்தால், S என்பது அப்பரவளைவின் குவியமாயிருக்கும்பொழுது SM, SP என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

புள்ளி $(at^2, 2at)$ இலுள்ள தொடலி $ty = x + at^2$.

$$x = -a \quad \text{யாகும்பொழுது,} \quad y = \frac{a(t^2 - 1)}{t}.$$

$$\therefore \quad M = \left\{ -a, \frac{a(t^2 - 1)}{t} \right\}.$$

$$\therefore \quad SM \text{ இன் சரிவு } = \frac{t^2 - 1}{-2t}.$$

$t^2 \neq 1$ எனின், SP யின் சரிவு $= \dfrac{2t}{t^2 - 1}$,

$\therefore$ $t^2 \neq 1$ எனின் SM என்பது SP யிற்குச் செங்குத்து.

$t = 1$ எனின், $P = (a, 2a)$, $M = (-a, 0)$

ஆகவே, SP என்பது y அச்சிற்கும் SM என்பது x அச்சிற்குஞ் சமாந்தரம்.

ஆகவே, SP என்பது SM இற்குச் செங்குத்து.

சமச்சீரால், $t = -1$ ஆகும்பொழுதும் இம்முடிபு உண்மையாகும்.

3. இரண்டு செங்குத்துத் தொடலிகள் செலுத்தியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் ; அவற்றினுடைய தொடு புள்ளிகளைத் தொடுக்குங் கோடு குவியத்திற்கூடாகச் செல்லும்.

புள்ளி $(at^2, 2at)$ இலுள்ள தொடலி $ty = x + at^2$.

t இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கும் இச்சமன்பாடு $y =$ மாறிலி என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுங்காது. ஆகவே, பரவளைவிற்கு x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தொடலியும் இருத்தல் இயலாது. ஆகவே, இரண்டு தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயின், அத்தொடலிகளுள் ஒன்றுயினும் y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகாது.

அச்செங்குத்துத் தொடலிகள் $t_1y = x + at_1^2$,

$t_2y = x + at_2^2$ என்பனவாகுக.

சரிவுகளின் பெருக்கம் $\dfrac{1}{t_1t_2} = -1$.

அத்தொடலிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$at_1t_2,\ a(t_1+t_2)$ என்பனவாகும்.

ஆகவே, அவ்வெட்டும் புள்ளி செலுத்தியாகிய $x = -a$ என்னுங் கோட்டின்மீது கிடக்கும்.

P_1P_2 என்னும் நாணின் சமன்பாடு

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$$

அல்லது $$y(t_1 + t_2) = 2x - 2a.$$

$x = a, y = 0$ ஆகும்பொழுது இது தீர்க்கப்படும்.

ஆகவே, P_1P_2 என்னும் நாண் குவியத்தினூடாகச் செல்லும்.

4. ஒரு பரவளைவில் P என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள செவ்வன் அப்பரவளைவின் அச்சை G இற் சந்தித்தால், $SG = SP$.

$P \equiv (at^2, 2at)$ ஆகுக.

P யிலுள்ள செவ்வன் $y + tx = 2at + at^3$.

$y = 0$ ஆகும்பொழுது, $x = 2a + at^2$.

$$\therefore\ G = (2a + at^2, 0).$$

$$\therefore\ SG = a + at^2.$$

$$SP^2 = (at^2 - a)^2 + (2at)^2 = (a + at^2)^2$$

$$\therefore\ SG = SP.$$

5. p என்பது ஒரு பரவளைவில் P என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடலியிலிருந்து குவியத்தின் செங்குத்துத் தூரமாயிருக்க, r என்பது S இலிருந்து P யினது தூரமாயின், $p^2 = ar$.

$P \equiv (at^2, 2at)$ ஆகுக.

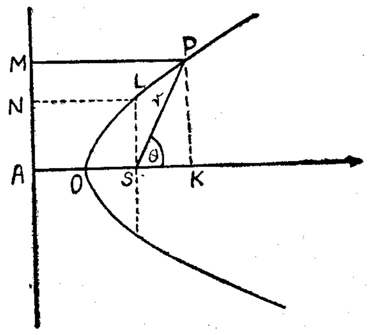
இப்போது $$p = \frac{a(1+t^2)}{\sqrt{(1+t^2)}} = a\sqrt{(1+t^2)}.$$

ஆனால், $$r = SP = a(1 + t^2)$$

$$\therefore\ p^2 = ar.$$

6. குவியத்தை முனைவாயும் அச்சை ஆரம்பக் கோடாயுங் குறித்து எடுத்த ஒரு பரவளைவின் முனைவுச் சமன்பாடு $l/r = 1 -$ கோசை θ.

இங்கு l என்பது அரைச் செவ்வகலம்.



அப்பரவளைவின் அச்சு செலுத்தியை யிற் சந்திக்க. S என்பது குவியமாகுக. P என்பது அப்பரவளைவின் மீது $SP=r$ ஆயும் நீட்டிய AS ஒடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குவதாயுமுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. PM என்பது செலுத்திக்கு வரைந்த செங்குத்தாயின் $SP = PM = r$.

L என்பது செவ்வகலத்தின் ஒரு முனையாகுக ; LN என்பது செலுத்திக்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படுக.

ஆயின், $LN = LS = l$.

PK என்பது AS இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டமையால், AS என்னுந் திசையில் அளக்கப்படும் SK இனது நீளம் r கோசை θ.

$$AK = AS + SK = NL + r \text{ கோசை}\theta.$$

$$\therefore\ r = l + r \text{ கோசை } \theta;$$

$$\therefore\ \frac{l}{r} = 1 - \text{கோசை } \theta.$$

θ என்பது SA யோடு SP யால் ஆக்கப்பட்ட கோணமாயின்,

$$\frac{l}{r} = 1 - \text{கோசை } (\pi - \theta) = 1 + \text{கோசை } \theta.$$

பயிற்சி 15.

1. $A'B'C'$ என்பது ஒரு பரவளைவின் A, B, C என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகளால் ஆக்கப்பட்ட முக்கோணியாயும், G, G' என்பன முறையே $ABC, A'B'C'$ என்னும் முக்கோணிகளின் மையப்போலியாயும் இருந்தால், GG' என்பது அப்பரவளைவின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

H என்பது GG' இன்மீது $GH = 2\,HG'$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், H என்பது அப்பரவளைவின் மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

2. ஒரு பரவளைவினது நாண் அதன் உச்சிக்கூடாக வரையப்பட்டால் அதன் மையம் ஒரு நிலையான பரவளைவிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

3. ஒரு பரவளைவினுடைய நாண்கள் ஒரு நிலையான திசையில் வரையப்பட்டால், அவற்றின் மையங்கள் அப்பரவளைவின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர் கோட்டின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

4. $y^2=4\,ax$ என்னும் பரவளைவின் மீதுள்ள $(at_1^2,\ 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாண் $(at_1^2,\ 2at_1)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனுயின் $t_1^2+t_1t_2+2=0$ எனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு, $8a$ யிற் பெரிதான கிடைக்கூறுள்ள அப்பரவளைவின் எப்புள்ளியும் அப்பரவளைவின் வேறிரு புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்களின் வெட்டுப் புள்ளியாகுமெனக் காட்டுக.

5. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின் இரு புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் $(x_1,\ y_1)$ என்னும் புள்ளியிற் சந்திக்க, அப்புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்கள் $(x_2,\ y_2)$ இற் சந்தித்தால் $ax_2=2a^2+y_1^2-ax_1$ என்றும் $ay_2+x_1y_1=0$ என்றுங் காட்டுக.

6. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின் குவிய நாணொன்றினுடைய முனைகளிலுள்ள செவ்வன் களின் வெட்டுப் புள்ளி $y^2=a(x-3a)$ என்னும் பரவளைவின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

7. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின்மீது $(at^2,\ 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வன் (h,k) என்னும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் சென்றால், t யினாலே தீர்க்கப்படுஞ் சமன்பாட்டை எழுதுக. தந்த ஒரு புள்ளிக் கூடாக மூன்றின் மேற்பட்ட செவ்வன்கள் செல்லா என்றும் "t_1", "t_2", "t_3" என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்கள் ஒரே புள்ளிக்கூடாகச் சென்றால் $t_1+t_2+t_3=0$ என்றும் உய்த்தறிக.

8. நிலையான இரு நேர்கோடுகள் O என்னும் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றையொன்று செங்கோணங்களில் வெட்டுகின்றன. ஒரு மாறுங்கோடு $P,\ Q$ என்பனவற்றில் $OP=OQ^2$ ஆகும்படி அந்நிலையான கோடுகளை வெட்டுமாறு வரையப்படுகின்றது. அம்மாறுங் கோடு ஒரு நிலையான பரவளைவை என்றுந் தொடுமெனக் காட்டுக.

9. $P,\ Q$ என்பன $y^2=4x$ என்னும் பரவளைவின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள் ; அவற்றைத் தொடுக்கும் நேர்கோடு $(2,\ 0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது. அப்பரவளைவிற்கு $P,\ Q$ என்பனவற்றிலுள்ள செவ்வன்கள் $y^2=4(x-4)$ என்னும் பரவளைவின்மீது ஒன்றையொன்று வெட்டுமென நிறுவுக.

10. PQ என்பது ஒரு பரவளைவின் குவியத்திற்கூடாகச் செல்லுமாறு $P,\ Q$ என்பன அப்பரவளைவின் மீதுள்ள இரு மாறும் புள்ளிகள். PQ என்பதை விட்டமாகவுள்ள வட்டம் அப்பரவளைவை மீண்டும் L,M என்னும் புள்ளிகளிற் சந்தித்தால், LM என்பது அப்பரவளைவின் அச்சின்மீது நிலையான ஒரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

11. A,B,P,Q என்பன $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின்மீது A யிலுள்ள தொடலிக்கு BP யானது சமாந்தரமாகும் படியும் B யிலுள்ள தொடலிக்கு AQ வானது சமாந்தரமாகும் படியுமுள்ள புள்ளிகள். AB என்பது அப்பரவளைவின் குவியத்திற்கூடாகச் சென்றால், PQ வின் மையம் $5y^2=2a(x-9a)$ என்னும் பரவளைவின்மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

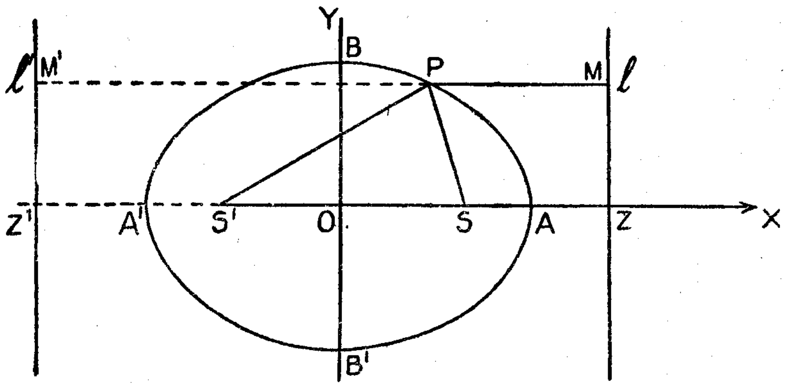
12. PQ வானது ஒரு பரவளைவின் குவிய நாணின் அதனை விட்டமாகவுள்ள வட்டம் பரவளைவின் செலுத்தலியைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 6

நீள்வளையம்

வரைவிலக்கணம்.

l ஆனது ஒரு தளத்திலுள்ள நிலைத்தவொரு கோடும், S ஆனது l இல் இராத, அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியுமாகுக. P யானது அத்தளத்தில், l இற்கு S இருக்கும் அதே பக்கத்திலிருக்கும் ஒரு மாறும் புள்ளியும், M ஆனது P யிலிருந்து l இற்குள செங்குத்தின் அடியுமாகுக. P யானது, 1 இலும் குறைந்தவொரு மாறிலி e ஆக, $\frac{SP}{PM}=e$ எனும் வண்ணம் அசையுமாயின், P யின் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையம் எனப்படும். S அதன் குவியம் எனவும், l செலுத்தி எனவும், e மையவகற்சித்திறன் எனவும் கூறப்படும்.



l இற்குச் செங்குத்தாகவும் அதை Z இல் சந்திக்கும் படியாகவும் SZ ஐ வரைக.

$\frac{SA}{AZ}=\frac{SA'}{A'Z}=e$ ஆகும் வண்ணம் A,A' எனும் புள்ளிகளை முறையே SZ இலும் நீட்டித்த ZS இலும் எடுத்துக் கொள்க. எனவே A,A' என்பன நீள்வளையத்திலுள்ள புள்ளிகளாகும். O வானது AA' இன் நடுப்புள்ளியும் $2a$ அதன் நீளமுமாகுக. ஆகவே,

$$e=\frac{SA'-SA}{A'Z-AZ}=\frac{a+OS-(a-OS)}{2a}=\frac{OS}{a}$$

$$\therefore\ OS=ae.$$

இன்னும் $$e = \frac{SA'+SA}{A'Z+AZ} = \frac{2a}{(a+OZ)+(OZ-a)} = \frac{a}{OZ}$$

$$\therefore\ OZ = \frac{a}{e}.$$

x அச்சின் நேர்த்திசைக்கு OZ ஐயும் O ஊடு செல்கின்ற செங்குத்துக் கோட்டை y அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க. $P(x,y)$ ஆனது நீள் வளையத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாகுக. இன்னும் PM ஆனது l இற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படுவதாகுக.
எனவே,

$$SP^2 = e^2PM^2.$$

$P\equiv(x,y)$, $S=(ae,o)$ ஆதலின்

$$SP^2 = (x-ae)^2+y^2.$$

l ஆனது $x=\frac{a}{e}$ எனுங் கோடாதலின்

$$PM^2 = \left(\frac{a}{e}-x\right)^2$$

$$\therefore\quad (x-ae)^2+y^2 = e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2$$

$$\therefore\quad x^2(1-e^2)+y^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\therefore\quad \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}+\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}.$$

இங்கு $\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2(1-\mathbf{e}^2)$ எனவும், $\mathbf{b}$ நேர் எனவும் கொள்ளப்படும்.
இதுவே நீள்வளையத்தின் சமன்பாடாகும்.

x ஆனது $-x$ இனுலோ, அல்லது y ஆனது $-y$ இனுலோ மாற்றீடு செய்யப்படின், சமன்பாடு மாற்றமடையாதிருக்கும்.

$\therefore$ (x,y) வளையியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், $(-x,y)$, $(x,-y)(-x,-y)$ என்பனவும் அதிலுள்ள புள்ளிகளாகும்.

$\therefore$ அவ்வளையியானது இரு ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் பற்றியும் சமச்சீருடையதாகும்.

y நேரெனின் $$y = b\sqrt{1-x^2/a^2}.$$

$\therefore$ x ஆனது 0 இலிருந்து a வரையும் அதிகரிக்கும்போது, y ஒழுங்காக b யிலிருந்து 0 இற்குக் குறைந்து வருகின்றது. நேர்காற் பகுதியிலுள்ள வளையியின் பாகமானது பின்னர் பெறப்படும். முழுமையான வளையி வரிப்படத்திற் காட்டிய வடிவத்தையுடையது. உருவத்தின் சமச்சீரிலிருந்து நீள்வளையமானது S' என்னும் இரண்டாங் குவிய மொன்றையும் l' என்னும் அதனேடொத்த செலுத்தியொன்றையுமுடையது. P யானது நீள்வளைய

மொன்றின் யாதுமொரு புள்ளியும், PM' ஆனது l' இற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுமிருப்பின்

$$\frac{S'P}{PM'} = e$$

நீள்வளையமானது y அச்சின் நேர்ப் பாகத்தை B யிலும் மறைப் பாகத்தை B' இலும் வெட்டுமாயின், BB' இன் நீளம் $2b$ யாயும் $B\equiv(0,b)$, $B'\equiv(0,-b)$ யாயும் இருக்கும்.

O விற்கூடாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு நாணும் O வில் இருகூறிடப்படும். எனவே O வானது நீள்வளையத்தின் **மத்திய புள்ளி** எனப்படும்.

AA', BB' என்பன நீள்வளையத்தினது **தலைமையச்சுக்கள்** எனப்படும்; AA' ஆனது **பேரச்சு** எனவும் BB' ஆனது **சிற்றச்சு** எனவுங் கூறப்படும்.

பேரச்சிற்குச் செங்குத்தாகக் குவியமொன்றினூடு செல்லும் நாண் **செவ்வகலம்** எனப்படும்.

P யானது நீள்வளையத்தின் யாதுமொரு புள்ளியாயின்

$$SP = e\ PM,\quad S'P = e\ PM'$$

$$\therefore\ SP+S'P = e(PM+PM') = e\ ZZ'$$

$$= 2e.\ OZ = 2a\ .$$

ஆகவே நீள்வளையத்தினது புள்ளியொன்றின் குவியத்தூரக் கூட்டுத்தொகை மாறுததாயும் பேரச்சின் நீளத்திற்குச் சமமாயுமிருக்கும்.

ஒரு நாணின் சமன்பாடு.

(x_1,y_1), (x_2,y_2) நீள்வளையத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளாகுக. ஆகவே

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = 1 = \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}.$$

பின்வரும் சமன்பாட்டினைச் சிந்திக்க.

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2} = \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+1$$

இது x,y இலுள்ள முதலாம்படிச் சமன்பாடானமையின் ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கின்றதாகும். $x=x_1$, $y=y_1$ ஆனபோது சமன்பாடானது தீர்க்கப்படும். இன்னும் $x=x_2$, $y=y_2$ ஆனபோதும் இது தீர்க்கப்படும்.

$\therefore$ இச்சமன்பாடு அப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டைக் குறிக்கும்.

தொடலியின் சமன்பாடு.

(x_1,y_1), (x_2,y_2) ஆகிய இரு புள்ளிகளும் ஒன்றையொன்று நோக்கிச் சென்று, இறுதியில் ஒன்றுபடும்போது, அந்நாணனது ஒன்றும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலியாகும்.

$\therefore$ நீள்வளையத்தில் (x_1, y_1) எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடானது $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ என மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற் போடப்படுவதனாற் பெறப்படும்.

அதாவது (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடானது

$$2\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + 1 = 2,$$

அல்லது $$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

பரமானக் குறியீட்டு விளக்கம்.

$x = a\ \text{கோசை}\ \theta$, $y = b\ \text{சைன்}\,\theta$ ஆக இருக்கும்போது, θ என்னவாயிருப்பினும், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகிய சமன்பாடானது தீர்க்கப்படும்.

$\therefore$ $(a\ \text{கோசை}\ \theta,\ b\ \text{சைன்}\ \theta)$ ஆகிய புள்ளி θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நீள்வளையத்திலுளது.

$\theta = 0$ ஆகும்போது, புள்ளியானது A யைக் குறிப்பதாகும். θ வானது 0 இலிருந்து $\frac{\pi}{2}$ இற்கு அதிகரிக்க, புள்ளியானது நேர்க் காலியிலுள்ள நீள்வளையத்தினது வில்லை வரைகின்றது. θ வானது $\frac{\pi}{2}$ இலிருந்து π இற்கு அதிகரிக்க, இரண்டாவது காலியிலுள்ள வில்லானது வரையப்படும். θ வானது π இலிருந்து $\frac{3\pi}{2}$ இற்கு அதிகரிக்க மூன்றும் காலியிலுள்ள வில்லா. ரது வரையப்படும். இன்னும் θ வானது $\frac{3\pi}{2}$ இலிருந்து 2π இற்கு ˌதிகரிக்க நாலாம் காலியிலுள்ள வில்லானது வரையப்படும்.

$\therefore$ θ வானது 0 இலிருந்து 2π இற்கு அதிகரிக்க, முழுவளையியும் A யிற் தொடங்கி இடஞ்சுழியாக ஒரு முறை வரையப்படும்.

$\therefore$ வளையியிலுள்ள எப்புள்ளியும் $(a\ \text{கோசை}\ \theta,\ b\ \text{சைன்}\ \theta)$ எனும் ஆள்கூறுகளை யுடையதாகும். இங்கு $0 \leq \theta \leq 2\ \pi$. θ வானது அப்புள்ளிக்கொத்த மையவகற்சிக் கோணமெனப்படும். A எனும் புள்ளி 0 ஐ அல்லது 2π இனை மையவகற்சிக் கோணமாகவுடையதெனக் கருதப்படும்.

நாணின் சமன்பாடு.

θ_1, θ_2 என்பன நீள்வளையத்திலுள்ள இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் மையவகற்சிக் கோணங்களாகுக. ஆகவே அப்புள்ளிகளைத் தொடுக்குங் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - b\ \text{சைன்}\ \theta_1)\ (a\ \text{கோசை}\ \theta_1 - a\ \text{கோசை}\ \theta_2)$$
$$= (x - a\ \text{கோசை}\ \theta_1)\ (b\ \text{சைன்}\ \theta_1 - b\ \text{சைன்}\ \theta_2)$$

அ—து $$-(y - b\ \text{சைன்}\ \theta_1)\ a\ \text{சைன்}\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$= (x - a\ \text{கோசை}\ \theta_1)\ b\ \text{கோசை}\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

அ—து $$\frac{x}{a}\ \text{கோசை}\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{y}{b}\ \text{சைன்}\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$= \text{கோசை}\ \frac{\theta_1-\theta_2}{2}.$$

தொடலியின் சமன்பாடு.

'θ_1' எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு θ_1, ஒடு θ_2 ஒன்றுபட மேற்கூறப்பட்டுள்ள நாணின் எல்லை வடிவமாகும். $\therefore$ "θ" ஆகிய புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\ \text{கோசை}\ \theta + \frac{y}{b}\ \text{சைன்}\ \theta = 1.$$

செவ்வனின் சமன்பாடு.

"θ" எனும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனனது

$$(x - a\ \text{கோசை}\ \theta)\ \frac{\text{சைன்}\ \theta}{b} - (y - b\ \text{சைன்}\ \theta)\ \frac{\text{கோசை}\ \theta}{a} = 0$$ ஆகிய சமன்பாட்டினாற் கொடுக்கப்படும்.

அ—து. $$\frac{x}{b}\ \text{சைன்}\ \theta - \frac{y}{a}\ \text{கோசை}\ \theta = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\ \text{கோசை}\ \theta\ \text{சைன்}\ \theta.$$

கோசைθ வும் சைன்θ வும் பூச்சியமில்லாதனவாயின், இது

$ax\ \text{சீக}\ \theta - by\ \text{கோசீ}\ \theta = a^2 - b^2$ என எழுதப்படலாம்.

ax secθ − by cosecθ = a² − b²

தொடுகை நிபந்தனை.

$lx + my + n = 0$ என்னுங்கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு ஒரு தொடலியாகுக. ஆயின் (x', y') என்னும் புள்ளி அதன் தொடுபுள்ளியாயின் $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$, $lx + my + n = 0$ என்னுமிரு சமன்பாடுகளும் ஒரு கோட்டையே குறிக்கும்.

பயிற்சி 16.

1. $2a$, $2b$ என்பன தனது பேரச்சினதும் சிற்றச்சினதும் நீளங்களாகவுள்ள நீள்வளையமொன்றினது செவ்வகத்தின் நீளம் $\dfrac{2b^2}{a}$ எனக் காட்டுக.

2. நீள்வளையமொன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் மையவகற்சிக்கோணம் θ எனின், அந் நீள்வளையத்தின் குவியங்களிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரங்கள் $a(1+e\,\text{கோசை}\,\theta)$, $a(1-e\,\text{கோசை}\,\theta)$ என நிறுவுக. இங்கே $2a$ யானது பேரச்சின் நீளமாகும்.

3. நீள்வளையமொன்றில் P எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியானது செலுத்தியை T இற் சந்தித்தால், S ஆனது ஒத்த குவியமுமாயின், SP யிற்கு ST செங்குத்தென நிறுவுக.

4. நீள்வளையமொன்றினது குவியமொன்றிலிருந்து அந்நீள்வளையத்தின் யாதுமொரு தொடலிக்குள்ள செங்குத்தின் அடியானது அந்நீள்வளையத்தின் பேரச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்திற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

[இவ்வட்டமானது துணைவட்டமெனக் கூறப்படும்]

5. நீள்வளையமொன்றில் P யாதுமோர் புள்ளி; துணைவட்டத்தை Q விற் சந்திக்க PQ வானது பேரச்சிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுளது. P யினது மையவகற்சிக் கோணம் பேரச்சின் நேர்த்திசையுடன் OQ ஆக்குங் கோணமெனக் காட்டுக. இங்கு O நீள்வளையத்தின் மையம்.

6. நீள்வளையமொன்றின் இரு குவியங்களிலுமிருந்து அந்நீள்வளையத்தின் யாதுமொரு தொடலிக்குள்ள செங்குத்துக்களின் நீளங்களினது பெருக்குத் தொகை ஒரு மாறிலியெனவும் அது b^2 இற்குச் சமமெனவும் நிறுவுக. இங்கு $2b$ யானது சிற்றச்சின் நீளமாகும்.

7. நீள்வளையமொன்றினது தொடலியொன்று இரு குவியங்களையும் தொடு புள்ளிக்குத் தொடுக்குங் கோடுகளுடன் சமசரிவுடையதென நிறுவுக.

8. $lx+my+n=0$ எனுங்கோடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ஆகிய நீள்வளையத்திற்குத் தொடலியாயின் $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ எனக் காட்டுக.

$x\,\text{கோசை}\,\theta+y\,\text{சைன்}\,\theta=p$, $y\,\text{கோசை}\,\theta-x\,\text{சைன்}\,\theta=q$ ஆகிய சமன்பாடுகள் $x^2+y^2=p^2+q^2$ என்பதைத் தருகின்றனவெனும் உண்மையைக் கொண்டு அந்நீள்வளையத்தின் எவையேனும் இரு செங்குத்தான தொடலிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி

$x^2+y^2=a^2+b^2$ எனும் வட்டத்திற் கிடக்குமென நிறுவுக.

[இவ்வட்டமானது செலுத்திவட்டமென்று கூறப்படும்]

9. நீள்வளையமொன்றின் ஒரு புள்ளி P யிலுள்ள செவ்வனனது பேரச்சை G இற் சந்திப்பின் $SG=e.SP$ எனக் காட்டுக. இங்கு S ஆனது நீள்வளையத்தின் ஒரு குவியமும், e அதன் மையவகற்சித் திறனுமாகும்.

10. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்தின் ஒரு மாறு நாண் $y=mx$ எனும் ஒரு தரப்பட்ட கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாயுளதாயின் அந்நாணின் மத்திய புள்ளி $y=m'x$ எனும் நிலைக் கோட்டிலிருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு $mm'=-\dfrac{b^2}{a^2}$. [$y=mx, y=m'x$ ஆகிய கோடுகள் நீள்வளையத்தின் ஒரு சோடி இணைவிட்டங்களெனப்படும்.]

11. (x_1,y_1) ஆகிய புள்ளியில் இருகூறிடப்பட்ட $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ஆகிய நீள்வளையத்தின் நாணினது சமன்பாடு $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=\dfrac{x^2{}_1}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}$ எனக் காட்டுக.

[x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் நாணனது கோணம் θ வை ஆக்குக. அந்நாணிலுள்ள புள்ளியானது $(x_1+r\,\text{கோசை}\,\theta)$, $(y_1+r\,\text{சைன்}\,\theta)$ எனும் வடிவத்தையுடைய ஆள்கூறுகளையுடையதாகும். இப்புள்ளியானது நீள்வளையத்திலுள்ளதாயின்,

$$\frac{(x_1+r\,\text{கோசை}\,\theta)^2}{a^2}+\frac{(y_1+r\,\text{சைன்}\,\theta)^2}{b^2}=1$$

இச்சமன்பாடானது நீள்வளையமும் நாணும் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றதாகிய இரு புள்ளிகளுக்கும் ஒத்த r இன் இரு பெறுமானங்களையும் கொடுக்கின்றது. எனவே இச் சமன்பாட்டினுற் கொடுக்கப்பட்ட r இன் இரு பெறுமானங்களும் பருமனிற் சமமாயும் குறியில் எதிரானவையாயும் இருக்கும். $\therefore$ r இன் குணகம் பூச்சியமாகும்.]

12. தன் ஒரு குவியத்தை முனைவாகவும் பேரச்சைத் தொடக்கக் கோடாகவுங் கொண்ட ஒரு நீள்வளையத்தின் முனைவுச் சமன்பாடானது $\dfrac{l}{r}=1+e\,\text{கோசை}\,\theta$ என நிறுவுக.

இங்கு $2l$ ஆனது செவ்வகலத்தின் நீளமும் e மையவகற்சித் திறனுமாகும்.

13. $2a$, $2b$ என்னுந் தலைமை அச்சுக்களும் O என்னும் மையமும் உள்ள நீள்வளையத்தில் P, Q என்பன இரு புள்ளிகளாகும். P யிலுள்ள தொடலி OQ இற்குச் சமாந்தரமாயின், Q விலுள்ள தொடலி OP யிற்குச் சமாந்தரமாகுமெனக் காட்டுக. அன்றியும் OP யிற்குச் சமாந்தரமான யாதுமொரு நாண் OQ என்பதால் இருகூறிடப்படுமெனக் காட்டுக.

$$OP^2+OQ^2=a^2+b^2$$

என்பதையும் நிறுவுக.

14. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு α, β' என்னு மையவகற்சிக் கோணங்களுள்ள புள்ளிகளில் வரையப்படுந் தொடலிகள்

$$\left[\frac{a\,\text{கோசை}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{கோசை}\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}},\ \frac{b\,\text{சைன்}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\text{கோசை}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right]$$

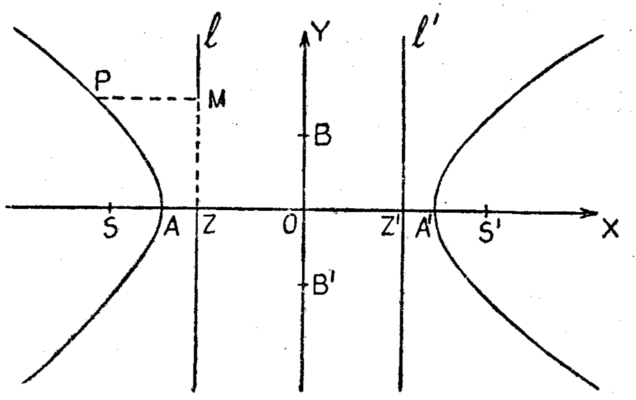
என்னும் புள்ளியில் வெட்டுமெனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 7

அதிபரவளைவு

வரைவிலக்கணம்.

l ஆனது தளமொன்றிலுள்ள ஒரு கோடும் S ஆனது l இல் இராது அத்தளத்திலிருக்கின்றவொரு நிலைத்த புள்ளியுமாகுக. P யானது அத்தளத்தில் l இற்கு S இருக்கும் அதே பக்கத்திலுள்ள புள்ளியும், இன்னும் P யிலிருந்து l இன் மீதுள்ள செங்குத்தின் அடி M உம் ஆகுக. e யானது 1 இலும் கூடிய ஒரு மாறிலியாகவுமிருக்க, $\frac{SP}{PM} = e$ எனும் வகையில் P யானது இயங்குமாயின், P யின் ஒழுக்கு ஒரு அதிபரவளைவெனப்படும். அதிபரவளைவின் குவியம் S எனவும், செலுத்தி l எனவும், மையவகற்சித்திறன் e எனவுங் கூறப்படும்.



SZ ஐ l இற்குச் செங்குத்தாகவும் அதனை Z இற் சந்திக்கவும் வரைக.
$\frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = e$ எனும் வகையில் A, A' ஆகிய புள்ளிகளை முறையே SZ இலும் நீடித்த SZ இலும் எடுத்துக் கொள்க. ஆகவே A, A' என்பவை அதிபரவளைவிலுள்ள புள்ளிகளாகும். O வானது AA' இன் மத்திய புள்ளியும் $2a$ யானது AA' இன் நீளமுமாகுக.

$$e = \frac{SA'+SA}{A'Z+AZ} = \frac{SO+a+SO-a}{2a} = \frac{OS}{a}$$

$$\therefore \quad OS = ae.$$

இன்னும், $e = \frac{SA'-SA}{A'Z-AZ} = \frac{2a}{OZ+a-(a-OZ)} = \frac{a}{OZ}$

$$\therefore \quad OZ = \frac{a}{e}.$$

ZO ஐ, X அச்சின் நேர்ப் பக்கமெனவும் O விற்கூடாகவுள்ள அதன் செங்குத்தை Y அச்செனவும் கருதுக.

$P(x, y)$ யானது அதிபரவளைவிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாகுக. இன்னும் l இற்குச் செங்குத்தாக PM ஆனது வரையப்படுக. எனவே

$$SP^2 = e^2 . PM^2.$$

$$S = (-ae, 0)$$

$$\therefore \quad SP^2 = (x+ae)^2 + y^2.$$

l ஆனது $x = -\frac{a}{e}$ என்னுங் கோடாதலின்

$$PM^2 = \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\therefore \quad (x+ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\therefore \quad x^2(e^2-1) - y^2 = a^2(e^2-1)$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ இங்கு $b^2 = a^2(e^2-1)$ எனவும் b நேரெனவும் எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

இதுவே அதிபரவளைவின் சமன்பாடாகும். வளையியானது இரு ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் பற்றியுஞ் சமச்சீருடையது.

$y = 0$ ஆகும்போது $x = \pm a$ எனவே,

$A \equiv (-a, 0)$, $A' \equiv (a, 0)$.

$x = 0$ ஆகும்போது, y யிற்குப் பெறுமானம் இல்லை.

ஆகவே வளையியானது y அச்சை வெட்டமாட்டாது.

y நேராயிருக்கும்போது

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

$\therefore$ வளையியிலுள்ள புள்ளிகளுக்கு $x^2 \geq a^2$

a யிலிருந்து x ஆனது அதிகரிக்க, y யானது உறுதியாகப் பூச்சியத்திலின்று அதிகரிக்கின்றது.

$x \to \infty$ ஆக, $y \to \infty$.

∴ நேர்க் காலியில் முடிவில்லாத கிளையொன்று A' இல் தொடங்கி வரையப்படுகின்றது.

∴ நிறைவான வளையியும் வரிப்படத்திற் காட்டிய உருவத்தை உடையது. அது ஒவ்வோர் கிளையும் முடிவில்லாத பகுதிகளையுடைய இரு தெளிவான கிளைகளைக்கொண்டதாகும். அதிபரவளைவானது S' எனும் இரண்டாங் குவியமொன்றையும் l' எனும் ஒத்த செலுத்தி ஒன்றையும் உடையதெனச் சமச்சீரிலிருந்து பெறப்படுகின்றது. P யானது அதிபரவளைவிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியும், l' இற்குச் செங்குத்தாய் PM' ஆனது வரையப்பட்டுளதுமாயின், $\dfrac{S'P}{PM'}=e$ ஆகும். O விற்கூடாகச் செல்லும் அதிபரவளைவின் ஒவ்வொரு நாணும் O வில் இருகூறுக்கப்படுகின்றது. எனவே O வானது அதிபரவளைவின் மையப்புள்ளியெனப்படும். O விற்கூடாகச்செல்லும் நாணொன்றிற்கு ஒரு முனையானது அதிபரவளைவின் ஒரு கிளையிலும் மற்றை முனையானது அதன்மற்றைய கிளையிலும் இருக்கும்.

AA' ஆனது அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு எனப்படும்.

y அச்சில் B, B' என்பன O விலிருந்து b என்னும் ஒரே தூரத்திலும் அதற்கு எதிர்ப்பக்கங்களிலும் எடுக்கப்படுவனவாயின், BB' ஆனது அதிபரவளைவின் இணையச்சு எனக் கூறப்படும்.

குறுக்கச்சிற்குச் செங்குத்தாக குவியமொன்றிற்கூடாகச் செல்லும் அதிபரவளைவின் நாணொன்று ஒரு செவ்வகலமென்று சொல்லப்படும்.

P யானது அதிபரவளைவிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயின்

$$SP=e\,PM, \qquad S'P=e\,PM'.$$

∴ எண் பெறுமானத்தில்

$$\begin{aligned} S'P-SP &= eZZ', \\ &= 2e.OZ, \\ &= 2a. \end{aligned}$$

∴ அதிபரவளைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் குவியத் தூரங்களின் வித்தியாசம் ஒரு மாறிலியாகும். இன்னும் அது குறுக்கச்சின் நீளத்திற்குஞ் சமமாகும்.

நாணொன்றின் சமன்பாடு.

நீள்வளையத்துக்குள்ளது போல $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் அதிபரவளைவிலுள்ள (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}+\frac{xx_2}{a^2}-\frac{yy_2}{b^2}=\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1y_2}{b^2}+1$$

(x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு.

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ என்பதாகும்.}$$

பரமானக் குறியீடு.

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ \ y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \text{ எனின்}$$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ஆகிய சமன்பாடு t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் தீர்க்கப்படும்.

∴ $\left\{\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right), \dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right\}$ எனும் வடிவத்தில் t எனும் ஒரு பரமானம் மூலம் தம் ஆள்கூறுகள் கொடுக்கப்படுகின்ற புள்ளியானது அவ் வதிபரவளைவிற் கிடக்கும்.

அதிபரவளைவிற்கு " t " எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியானது.

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{y}{b^2}\cdot\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=1$$

அல்லது
$$\frac{x}{2a}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{y}{2b}\left(t-\frac{1}{t}\right)=1$$

ஆகிய சமன்பாட்டினாற் கொடுக்கப்படும்.

இதனிலுங் கூடுதலாக இசைவாகும் பரமானக் குறியீடு $x=a$ சீக θ, $y=b$ தான் θ வாகும். θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் இவ்வாள்கூறுகள் உள்ள புள்ளி $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் அதிபரவளைவிற் கிடக்கும்.

θ என்னும் பரமானப் புள்ளியில் வரையப்படுந் தொடலி

$$\frac{x}{a^2}\cdot a \text{ சீக } \theta - \frac{y}{b^2}\cdot b \text{ தான் } \theta=1$$

அல்லது
$$\frac{x}{a}\cdot\text{சீக } \theta - \frac{y}{b}\text{ தான் } \theta=1$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

அணுகுகோடுகள்.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1 \text{ என எழுதப்படலாம்.}$$

$\therefore \ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ எனுங் கோட்டில் அல்லது $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ எனுங் கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் முன் கூறியுள்ள சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கமாட்டா. ஆகவே நேர்கோடுகள்

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,,$$

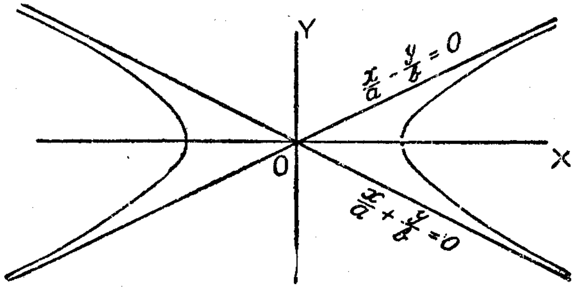
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\,,$$

என்பன அதிபரவளைவை எவ்விடத்தும் வெட்டமாட்டா.

நேர் காலியிலுள்ள அதிபரவளைவின் முடிவிலாப் பாகத்திலுள்ள $P(x_1, y_1)$ எனும் ஒரு புள்ளியைக் கருதுக. அதிபரவளைவில் P யானது உற்பத்தித் தானத்திலிருந்து முடிவிலாத் தூரத்திற்கு அசைய, x_1, y_1 ஆகிய இரண்டும் முடிவிலியை அணுகும். $\therefore$ P யானது முடிவிலியை நோக்கிச் செல்ல

$$\frac{1}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}} \to 0$$

$$\therefore \ \frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}=\frac{1}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}} \to 0.$$



$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ எனுங் கோட்டிலிருந்து P யினது தூரம்

$$\left|\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right| \Big/ \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.$$

$\therefore \ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ எனுங் கோட்டிலிருந்து P யின் தூரம், P யானது நேர் காலியிலுள்ள கிளைவழியே முடிவிலியை அணுக, பூச்சியத்தை அணுகும்.

மூன்றும் காலியிலுள்ள முடிவில்லாத கிளையில் P இருக்கும் போது இதே பெறுபேறு அமையுமென்பது சமச்சீரிலிருந்து பெறப்படும். இன்னும் சமச்சீரிலிருந்து, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ எனுங் கோடும் இரண்டாம் நான்காங் காலிகளிலுள்ள முடிவில்லாக் கிளைகளும் பற்றி அதே உடைமை அமையும்.

$\therefore \ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ ஆகிய இரு கோடுகளும் உறுதியாய் அதிபரவளைவின் பொருத்தமான முடிவிலாக் கிளைகளை, அவைகளை ஓரிடத்தும் வெட்டாது, அணுகும். இக்கோடுகள் அதிபரவளைவின் அணுகு கோடுகளெனக் கூறப்படும்.

பயிற்சி 17.

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் அதிபரவளைவின் செவ்வகலத்தினது நீளம் $\frac{2b^2}{a}$ எனக் காட்டுக.

2. அதிபரவளைவொன்றில் குவியமொன்றிலிருந்து தொடலியொன்றிற்குள செங்குத்தின் அடியானது குறுக்கச்சைத் தன் விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்திலிருக்கின்றதெனக் காட்டுக.
[துணை வட்டம்]

3. அதிபரவளைவொன்றில் அதன் குவியங்கள் இரண்டிலுமிருந்து யாதுமொரு தொடலிக்குள செங்குத்துக்கள் இரண்டின் நீளங்களினது பெருக்குத்தொகை ஒரு மாறிலியெனவும் அது b^2 இற்குச் சமமெனவும் நிறுவுக.

4. அதிபரவளைவொன்றில் P எனும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடலி செலுத்தியொன்றை T இற் சந்தித்தால் அதன் ஒத்த குவியம் S ஆயின், ST ஆனது SP யிற்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

5. அதிபரவளைவொன்றின் தொடலி இரு குவியங்களையும் அத்தொடு புள்ளியையும் இணைக்குங் கோடுகளுக்குச் சமசாய்வுடையதெனக் காட்டுக.

6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ஆகிய அதிபரவளைவின் எவ்விரு செங்குத்தான தொடலிகளும் ஒன்றையொன்று $x^2+y^2=a^2-b^2$ எனும் வட்டத்தில் வெட்டுகின்றனவெனக் காட்டுக.
[செலுத்தி வட்டம்]

7. அதிபரவளைவொன்றில் P எனும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள செவ்வன் குறுக்கச்சை G இற் சந்தித்தால், $SG = e.SP$ எனக் காட்டுக. இங்கு S, ஒரு குவியமாகும்.

8. $mm'=\frac{b^2}{a^2}$ ஆயிருக்க $y = mx$ ஆகிய கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகவுள்ள அதிபரவளைவின் எந்த நாணின் நடுப்புள்ளியும் $y = m'x$ எனுங் கோட்டிலிருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

9. (x_1, y_1) எனும் புள்ளியில் இரு சமக்கூறிடப்பட்ட $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் அதிபரவளைவு நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$$ எனக் காட்டுக.

10. தனது குவியமொன்று முனைவாகவும் குறுக்கச்சு தொடக்கக் கோடாகவும் உள்ள அதிபரவளைவொன்றின் முனைவுச் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e \text{ கோசை } \theta$$ என நிறுவுக. இங்கு $2l$, செவ்வகலமாகும்.

11. ஓர் அதிபரவளைவிலுள்ள P என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் வரையப்படுந் தொடலி அணுகுகோடுகளை முறையே Q, R என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாயின் P யானது QR இன் நடுப்புள்ளியெனக் காட்டுக.

12. ஓர் அதிபரவளைவிலிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியிலிருந்து அணுகுகோடுகளுக்குச் செங்குத்துக்கள் வரையப்படுமாயின் இச்செங்குத்துக்களின் பெருக்கம் மாறிலியாகுமெனக் காட்டுக.

13. ஓர் அதிபரவளைவின் அணுகுகோடுகள் செங்கோணங்களில் இருக்குமாயின் மையவகற்சித்திறன் $\sqrt{2}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

அணுகுகோடுகள் ஆள்கூற்றச்சுக்களாக எடுக்கப்படுமாயின் இச்செங்கோண அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $xy = c^2$ என்னும் வடிவமாகுமெனக் காட்டுக.

நுண்கணிதம்

அத்தியாயம் 1

ஒரு மாறியின் சார்பு

x என்பது குறித்த மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கூடாக மாறும் ஒரு கணியத்தைக் குறிக்க. y என்பது x இனுடைய பெறுமானங்களுட் சிலவற்றிற்கு அல்லது எல்லாவற்றிற்கும் ஒத்த தன்னுடைய பெறுமானங்கள், யாதோ ஒரு விதி பற்றித் தீர்மானிக்கப்பட்ட வேறொரு மாறுங் கணியமாயின், y என்பது x இன் சார்பெனப்படும்; அதனை $y = f(x)$ என எழுதுகின்றோம்.

x இன் யாதுமொரு தந்த பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் y யிற்கு ஒரு பெறுமானத்திற்கு மேல் இல்லையெனின், y என்பது x இன் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பெனப்படும். x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்தனவாய் y யிற்கு ஒரு பெறுமானத்திற்கு மேல் உண்டெனின், y என்பது x இன் பல் பெறுமானச் சார்பெனப்படும். உதாரணமாக, y, x என்பனவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு $y = \sqrt{x}$ (x இனது நேர் வர்க்கமூலம்) என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்டால், y என்பது பூச்சியத்திலும் மேற்பட்ட, அல்லது அதற்குச் சமனை எல்லா x இற்கும் வரையறுக்கப்படும்; அது x இன் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகும். ஆனல், அத்தொடர்பு $y^2 = x$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்டால், y என்பது x இன் இரட்டைப் பெறுமானச் சார்பாகும்; அதற்குக் காரணம் x இன் யாதுமொரு நேர்ப் பெறுமானத்திற்கு ஒத்தனவாய் y யிற்கு இரு பெறுமானங்கள் உண்டு என்பதே. அத்தொடர்பு சைன் $y = x$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்டால், x ஆனது $-1, +1$ என்பனவற்றிற்கு இடையே (இரண்டும் உட்படக்) கிடக்கும்போதே y என்பது வரையறுக்கப்படும்; இவ்வீச்சிற்குள் x இன் யாதுமோர் ஒற்றைப் பெறுமானத்திற்கு y யிற்கு எத்தொகைப் பெறுமானங்களும் இருக்கலாம். அப்போது y என்பது முடிவின்றிய பல்பெறுமானச் சார்பெனப்படும்.

y என்பது x இன் சார்பாயின், x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் y யானது வரையறுக்கப்படும் என்பது இன்றியமையாத ஒன்றன்று என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும். இன்னும், ஆராய்ந்த உதாரணங்களிற் போல, x பற்றி y வரையறுக்கப்படும் விதியானது y யையும் x ஐயுந் தொடுக்கும் ஒரு சமன்பாடாயிருக்க வேண்டியதில்லை. உதாரணமாக, y என்பது x இலும் பெரிதல்லாத மிகப்பெரிய முழுவெண்ணுக்குச் சமன் என்னும் உடைமையால் y என்பது x இன் சார்பாக உரைக்கப்படலாம். y யானது x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் வரையறுக்கப்படுமென்பதும் அது ஒற்றைப் பெறுமானங் கொள்ளுமென்பதும் எளிதிற்

8—R 11681 (1/66)

புலனாகும். 0, 1 என்பனவற்றிற்கிடையே (0 உட்பட) x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு, $y = 0$ ஆகும். 1, 2 என்பனவற்றிற்கிடையே (1 உட்பட) x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு $y = 1$ ஆகும். -1, 0 என்பனவற்றிற்கிடையே (-1 உட்பட) x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு $y = -1$ ஆகும். -2, -1 என்பனவற்றிற்கிடையே (-2 உட்பட) x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு $y = -2$ ஆகும். இவ்வாறே பிறவும்.

பல்லுறுப்புச் சார்பு.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்க $a_0, a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ என்பன n மெய்யெண்களாயின், $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$ என்பது n என்னும் படியுள்ள x இன் பல்லுறுப்புச் சார்பெனப்படும். அது x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் வரையறுக்கப்படும்; அது ஒற்றைப் பெறுமானங் கொள்ளும்.

விகிதமுறுஞ் சார்பு.

P, Q என்பன ஒரே படியிலுள்ளனவாயிருத்தல் வேண்டும் என்று நியதியில்லாத x இனுடைய இரண்டு பல்லுறுப்புச் சார்புகளாயின், $\frac{P}{Q}$ என்பது x இன் விகிதமுறுஞ் சார்பெனப்படும். அது ஒற்றைப் பெறுமானமுடையது; ஆனால், Q என்பது பூச்சியமாகின்ற x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு (எவையேனும் அவ்வாறிருந்தால்) அது வரையறுக்கப்படுவதில்லை. உதாரணமாக $\frac{x^2+1}{x-1}$ என்பது $x = 1$ ஆகும்பொழுது வரையறுக்கப்படாத ஒரு விகிதமுறுஞ் சார்பு; ஆனால், அது x இனுடைய ஏனைப் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வரையறுக்கப்படும்; அது ஒற்றைப் பெறுமானமுடையது. P, Q என்பனவற்றினுடைய பொதுக் காரணிகள் (எவையேனு மிருந்தால்) அகற்றப்படும்பொழுது வருஞ் சார்பு என்றும் ஆரம்பச் சார்போடு ஒன்றாகாது. $\frac{x^2-1}{x-1}$ என்னும் விகிதமுறுஞ் சார்பு $x + 1$ என்பதனோடு ஒன்றாகாது. $x = 1$ ஆகும்பொழுது $x + 1$ என்பதற்கு 2 என்னும் வரையறுக்கப்பட்ட பெறுமானம் இருக்க, $x = 1$ ஆகும்பொழுது $\frac{x^2-1}{x-1}$ என்பது $\frac{0}{0}$ ஆய் மாறிப் பொருளற்றிருக்கு மென்பதே அதற்குக் காரணம்.

$x^0 = 1$ ஆதலால், c என்னும் ஒரு மாறிலியானது x இல் 0 படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பாகக் கொள்ளப்படலாம்; அதற்குக் காரணம் $c = cx^0$ என்பதே.

Q என்பது பூச்சியப்படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பாயின், $\frac{P}{Q}$ என்னும் விகிதமுறுஞ் சார்பு ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பாகும். இவ்வண்ணம் ஒரு

விகிதமுறும் எண்ணின் பகுதியிலுள்ள முழுவெண் 1 ஆயிருக்கும்போது அம்முழுவெண் அவ்விகிதமுறும் எண்ணின் ஒரு சிறப்பு வகையாயிருத்தல் போல, அப்பல்லுறுப்புச் சார்பும் அவ்விகிதமுறுஞ் சார்பின் ஒரு சிறப்பு வகையாகும்.

அட்சரகணிதச் சார்பு.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயும், $P_0, P_1 \ldots\ldots P_n$ என்பன x இனுடைய பல்லுறுப்புச் சார்புகளாயுமிருக்க, y என்பது

$$P_0y^n + P_1y^{n-1} + \ldots + P_n = 0$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்க்குமாயின், y என்பது x இன் ஓர் அட்சரகணிதச் சார்பெனப்படும்.

$y = \frac{P}{Q}$ வாயின், $Qy - P = 0$. இது Q, $-P$ என்னுங் குணகங்களோடு y யிலே முதலாம் படியிலுள்ள ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு; ஆகவே, ஒரு விகிதமுறுஞ் சார்பும் ஓர் அட்சரகணிதச் சார்பாகும். ஆனால், அட்சரகணிதச் சார்பு ஒவ்வொன்றும் விகிதமுறுஞ் சார்பாகாது. உதாரணமாக, விகிதமுறுஞ் சார்பாகாத $y = x + \sqrt{(x+5)}$ என்பதை எடுக்க. $(y-x)^2 = x + 5$ அல்லது $y^2 - 2xy + x^2 - x - 5 = 0$. இது x இனுடைய பல்லுறுப்பிச் சார்புகளாகிய 1, $-2x, x^2 - x - 5$, என்னும் குணகங்களோடு y யில் இரண்டாம் படியிலுள்ள ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு. ஆகவே, $x + \sqrt{(x+5)}$ என்பது x இன் ஓர் அட்சரகணிதச் சார்பாகும்.

ஓர் அட்சரகணிதச் சார்பு x இல் விளக்கமாகத் தரப்பட்டால், அது **விளக்க அட்சரகணிதச் சார்பு** எனப்படும். அவ்வட்சரகணிதச் சார்பு ஒருசமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்பட்டால், அது **மறைவட்சர கணிதச் சார்பு** எனப்படும். $y = x + \sqrt{(x+5)}$ எனின், y என்பது ஒரு விளக்கச் சார்பாகும்; ஆனால், y என்பது $y^2 - 2xy + x^2 - x - 5 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்பட்டால், அது ஒரு மறைவுச் சார்பு எனப்படும்.

கடந்த சார்பு அல்லது அதீதச் சார்பு.

அட்சரகணிதச் சார்பல்லாத எச்சார்புங் **கடந்த சார்பு** அல்லது **அதீதச் சார்பு** எனப்படும். திரிகோணகணிதச் சார்புகள் எல்லாங் கடந்தவை. y என்பது x இலும் பெரிதல்லாத மிகப் பெரிய முழுவெண் என்னும் உடைமையினால், y யானது வரையறுக்கப்பட்டால், y என்பது ஒரு கடந்த சார்பாகும். உயர் கணிதத்திலுள்ள பல சார்புகள் கடந்த சார்புகளாகும்.

X என்பது முடிவிலிக்கு அணுக, f (X) இன் எல்லை.

$f(x)$ என்பது x இனுடைய நேர்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் வரையறுக்கப்பட்ட x இன் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக.

பின்வரும் வரைவிலக்கணத்தைத் தருகின்றோம்.

ϵ என்னும் யாதுமொரு சிறு நேர்க் கணியந் தரப்பட்டால், x ஆனது x_0 என்னும் ஒரு மெய்யெண்ணிலும் பெரிதான யாதுமொரு பெறுமானத்தை எடுக்கும்போது $f(x)$, l என்பனவற்றின் வித்தியாசத்தின் எண்பெறுமானம் ϵ இலுஞ் சிறிதாகுமாறு x_0 ஐக் காண்போமாயின், x ஆனது முடிவிலிக்கு அணுக, $f(x)$ ஆனது l இற்கு அணுகும்.

இது பின்வருங் குறுகிய வடிவத்தில் எழுதப்படும்.

ϵ தரப்பட, $x_0 < x$ ஆகிய x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $|f(x)-l| < \epsilon$ ஆகுமாறு x_0 உண்டெனின், $x \to \infty$ ஆயின், $f(x) \to l$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ என்பதை எடுக்க.

ஆயின், $f(x)$ ஆனது பூச்சியத்திற்குச் சமனல்லாத x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் வரையறுக்கப்படும். $x \to \infty$ எனின், $f(x) \to 0$ என்பது மேலுள்ள வரைவிலக்கணத்திலிருந்து எளிதிற் காணப்படும்.

அதற்குக் காரணம் $|f(x)-0| = \dfrac{1}{x} < \epsilon$, எல்லா $x > \dfrac{1}{\epsilon}$ ஆயிருந்தால்.

வேறோர் உதாரணமாக, $f(x) = \dfrac{\text{சைன் } x}{\sqrt{x}}$ என்பதை எடுக்க.

ஆயின், x இனுடைய நேர்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f(x)$ என்பது வரையறுக்கப்படும்.

எல்லா x இற்கும் $|\text{சைன் } x| \leq 1$ ஆயிருத்தலால்

$$\left|\frac{\text{சைன் } x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ எல்லா } x > 0 \text{ ஆயிருந்தால்.}$$

இனி, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \epsilon$, எல்லா $x > \dfrac{1}{\epsilon^2}$ ஆயிருந்தால்,

$x_0 = \dfrac{1}{\epsilon^2}$ எனின், ϵ என்பது தரப்பட எல்லா $x > x_0$ ஆயிருக்க x_0 என்பது $|f(x)-0| < \epsilon$ ஆகும்படி உண்டு.

$$\therefore\ x \to \infty \text{ எனின், } \frac{\text{சைன் } x}{\sqrt{x}} \to 0.$$

$x \to \infty$ ஆகும்பொழுது $f(x) \to l$ எனின், x இனுடைய யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு அல்லது சில பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ ஆனது l என்னும் பெறுமானத்தை எடுக்குமென்பது வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெறப்படாது. $f(x)$ இற்கும் l இற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசத்தின் எண் பெறுமானம் ஒரு குறித்த பெறுமானத்திற்கு அப்பாற்பட்ட x

இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் விரும்பும் வண்ணஞ் சிறிதாக்கப்படலாம் என்பதே அதன் கருத்து. $x \to \infty$ ஆகும்பொழுது, $\dfrac{1}{x} \to 0$ என்பதை அறிவோம்; ஆனல், $\dfrac{1}{x}$ என்பது x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் பூச்சியம் என்னும் பெறுமானத்தை ஒருபோதும் எடுக்காது.

x ஆனது முடிவிலியை அணுக ஓர் எல்லைக்கு அணுகாத ஒரு சார்பிற்கு உதாரணமாக, சைன் x என்பதை எடுக்கலாம். x ஆனது வரையறையின்றிக் கூடுதலுற, இச்சார்பு $-1, +1$ என்பனவற்றிற்கு இடையே உள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் எடுத்துக் கொண்டு அலையும். ஆகவே, x ஆனது வரையறையின்றிக் கூடுதலுற, சைன் x ஆனது வரையறுக்கப்பட்ட யாதுமொரு பெறுமானத்தை அணுகாது. $x \to \infty$ ஆயிருக்க, சைன் x ஆனது ஓர் எல்லையை அணுகாது.

முடிவிலி என்னுஞ் சொல்லையும் ∞ என்னுங் குறியீட்டையும் வழங்குகின்றேமாயினும், முடிவிலி என்னும் யாதும் ஒரெண்ணுண்டென்று கொள்ளவில்லை என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும். "x முடிவிலிக்கு அணுக" என்னுஞ் சொற்றொடரையே வரையறுக்கின்றேம்; "முடிவிலி" என்னுஞ் சொல்லிற்கு அதனளவில் யாதுமொரு பொருளுங் கொடுக்கப்படவில்லை.

வரைவிலக்கணம். $f(x)$ இல் x ஆனது $-x$ ஆல் பிரதியிடப்படும் பொழுது பெறப்பட்ட சார்பை $f(-x)$ என்பது குறிக்க, $x \to \infty$ ஆயிருக்க, $f(-x) \to l$ ஆயிருந்தால், $x \to -\infty$ ஆயிருக்க $f(x) \to l$ ஆகும்.

எல்லைகளைப்பற்றி வரைவிலக்கணத்திலிருந்து நிறுவக்கூடிய பின்வருந் தேற்றங்களை உண்மையெனக் கொள்வோம்.

(1) k என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்க $f(x) \to l$ ஆயின், $kf(x) \to kl$ ஆகும்.

(2) $f(x) \to l$ ஆயும், $f(x)$ என்பது எல்லா x இற்கும் நேராயும் இருந்தால், $\sqrt{f(x)} \to \sqrt{l}$ ஆகும்.

(3) $f(x) \to l$ ஆயும், $\phi(x) \to l'$ ஆயுமிருந்தால், $f(x) + \phi(x) \to l + l'$ ஆகும்.

(4) $f(x) \to l$ ஆயும், $\phi(x) \to l'$ ஆயுமிருந்தால், $f(x)\,\phi(x) \to ll'$ ஆகும்.

(5) $f(x) \to l$ ஆயும், $\phi(x) \to l' \neq 0$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\frac{l\,(x)}{\phi(x)} \to \frac{f}{l'} \text{ ஆகும்.}$$

உ-ம். $x \to \infty$ ஆயிருக்க, $\sqrt{(x^2+x-1)} - x$ இன் எல்லைப் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$$\sqrt{(x^2+x+1)}-x=\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{(x^2+x+1)}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+x+1)}+x}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}$$

$\rightarrow \frac{1}{2}$, $x\rightarrow\infty$, ஆகும் பொழுது.

வரைவிலக்கணம்.

K என்னும் யாதுமொரு பெரிய நேர்க்கணியந் தரப்பட x_0 இலும் பெரிதாகிய எல்லா x இற்கும் $f(x)>K$ ஆகுமாறு x_0 என்பதைக் காண்போமாயின், $x\rightarrow\infty$ ஆயிருக்க, $f(x)\rightarrow\infty$ எனக் கூறுவோம்.

ஓர் எடுத்துக் காட்டாக, $x>0$ ஆகும்பொழுது, $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ என்பதை எடுக்க ; $f(x)=x^2+\frac{1}{x}>x^2$.

K என்பது யாதுமொரு நேர்க்கணியமாயின், எல்லா $x>\sqrt{K}$ ஆயிருந்தால், $x^2>K$.

$\therefore$ $x_0=\sqrt{K}$ எனின், எல்லா $x>x_0$ ஆயிருந்தால், $f(x)>K$.

$\therefore$ $x\rightarrow\infty$ ஆக, $\frac{x^3+1}{x}\rightarrow\infty$.

$x\rightarrow\infty$ ஆக, $f(x)\rightarrow\infty$ ஆயின், $x\rightarrow\infty$ ஆக, $\frac{1}{f(x)}\rightarrow 0$ ஆகும். அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு :—

ϵ என்பது யாதுமொரு சிறு நேர்க் கணியமாயின், எல்லா $x>$ சில x_0 ஆயிருக்க, $f(x)>\frac{1}{\epsilon}$ ஆகும். ஆகவே, எல்லா $x>x_0$ ஆயிருக்க $\frac{1}{f(x)}<\epsilon$ ஆகும். அதாவது எல்லா $x>x_0$ ஆயிருக்க $\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\epsilon$ ஆகும்.

மறுதலையாக, $x\rightarrow\infty$ ஆக, $f(x)\rightarrow 0$ ஆயின், $x\rightarrow\infty$ ஆக $\left|\frac{1}{f(x)}\right|\rightarrow\infty$ ஆகும்.

அதற்குக் காரணம், K என்பது யாதுமொரு பெரிய நேர்க் கணியமாயிருந்தால், எல்லா $x>$ சில x_0 ஆயிருக்க, $\left|f(x)\right|<\frac{1}{K}$ ஆகும்.

$\therefore$ எல்லா $x>x_0$ ஆயிருக்க $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>K$ ஆகும்.

$x\rightarrow\infty$ ஆக, $-f(x)\rightarrow\infty$ ஆகுமாறு, $f(x)$ என்னும் ஒரு சார்பு இருந்தால், $x\rightarrow\infty$ ஆக, $f(x)\rightarrow-\infty$ என்று கூறுவோம்.

முடிவில் தொடரின் ஒருங்கல்.

u_1, u_2, u_3, ... u_n, ... என்னும் ஒரு முடிவில் உறுப்புத் தொடரை ஆராய்க. இங்கு n ஆம் உறுப்பு n என்னும் நேர்முழுவெண் மாறியின் சார்பாகும்.

S_n என்பது அத்தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாகுக. $n\rightarrow\infty$ ஆக, $S_n\rightarrow l$ (ஒரு முடிவுள்ள எல்லை) ஆயின், அதாவது ϵ என்னும் யாதுமொரு நேர்க்கணியந் தரப்பட்டால், n_0 இலும் பெரிதாகிய n இன் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $|S_n-l|<\epsilon$ ஆகுமாறு n_0 என்னும் ஓரெண்ணைக் காண்போமாயின், $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ என்னும் முடிவில் தொடர் ஒருங்கு தொடர் எனப்படும் ; l என்பது அத்தொடரின் முடிவிலி வரைக்கும் உள்ள கூட்டுத்தொகையாகும்.

$n\rightarrow\infty$ ஆக, S_n என்பது ஒரு முடிவுள்ள எல்லைக்கு அணுகாதாயின் அத்தொடர் விரிதொடர் எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\quad+\quad\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

என்னுந் தொடரை ஆராய்க.

T_r என்பது r ஆம் உறுப்பைக் குறித்தால்,

$$T_r=\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}$$

$$T_1\qquad=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$T_2\qquad=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

....

....

$$T_n\qquad=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$\therefore$ $S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\rightarrow 1$, $n\rightarrow\infty$ ஆக.

∴ அத்தொடர் ஒருங்குவதொன்றுகும்; அதன் கூட்டுத்தொகை 1 ஆகும். இனி, $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ என்னுந் தொடரை ஆராய்க.

$n\to\infty$ ஆக, $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\to\infty$ ஆகும்.

∴ அத்தொடர் விரிவதொன்றுகும்.

பெருக்கற்றொடர்.

பொது விகிதத்தின் வேறுவேறு பெறுமானங்களுக்கு ஒரு பெருக்கற்றொடரின் ஒருங்கு தன்மையை இப்போது ஆராய்வோம்.

r என்பது மாருத ஓர் எண்ணுயிருக்க, n என்பது நேர்முழுவெண் பெறுமானங்களை மாத்திரம் எடுத்தால், $n\to\infty$ ஆக, r^n இன் எல்லையை முதல் ஆராய்வோம்.

r என்பது பூச்சியமாகாது -1, 1 என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடக்கின்றதெனக் கொள்க; அதாவது $0<|r|<1$.

$$\text{ஆயின், } \frac{1}{|r|}<1.$$

$$\therefore\ \frac{1}{|r|}=1+a,\ \text{இங்கு } a>0.$$

$$\therefore\ \frac{1}{|r|^n}=(1+a)^n.$$

n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயிருத்தலால், $(1+a)^n$ என்பது ஈருறுப்பித் தேற்றத்தால் விரிக்கப்படலாம்; அவ்விரிவிலுள்ள உறுப்புக்கள் எல்லாம் நேராகும்.

அவ்விரிவிலுள்ள உறுப்புக்களுள் ஒன்று na ஆகும்.

$$\therefore\ (1+a)^n>na.$$

$$\therefore\ \frac{1}{(1+a)^n}<\frac{1}{na}.$$

∴ $|r^n|=|r|^n<\dfrac{1}{na}<\epsilon$, எல்லா $na>\dfrac{1}{\epsilon}$ ஆயிருந்தால், அதாவது எல்லா $n>\dfrac{1}{a\epsilon}$ ஆயிருந்தால்,

∴ $|r|<1$ எனின், $n\to\infty$ ஆக, $r^n\to 0$ ஆகும்.

$r=1$ எனின், எல்லா n இற்கும் $r^n=1$.

$r=-1$ எனின், $r^n=(-1)^n=1$, n என்பது இரட்டையெண்ணுயின்,
$=-1$, n என்பது ஒற்றையெண்ணுயின்,

$|r|>1$ எனின், $|r|=1+a$. இங்கு $a>0$.

∴ எல்லா $n>\dfrac{K}{a}$ ஆயிருந்தால், $|r^n|>na>K$.

∴ $n\to\infty$ ஆக, $|r|^n\to\infty$.

இப்போது, $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots$ என்னும் பெருக்கற்றொடரை எடுக்க.

S_n என்பது அத்தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாயின்.

$$S_n=na,\ r=1 \text{ எனின்,}$$
$$=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r\neq 1 \text{ எனின்.}$$

∴ $r=1$ எனின், $a=0$ என்னும் பயனற்ற வகையை விலக்கும்பொழுது $n\to\infty$ ஆக, S_n என்பது ஒருமுடிவுள்ள எல்லையை அணுகாது.

∴ $r=1$ எனின், அத்தொடர் ஒருங்காது.

$-1<r<1$ எனின், $n\to\infty$ ஆக, $r^n\to 0$.

$$\therefore\ S_n\to\frac{a}{1-r}.$$

∴ அத்தொடர் ஒருங்கும்; முடிவிலி வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகை $\dfrac{a}{1-r}$.

$r=-1$ எனின், $S_n=0$, n என்பது இரட்டை யெண்ணுயின்;
$=a$, n என்பது ஒற்றையெண்ணுயின்.

∴ $n\to\infty$ ஆக, S_n என்பது ஓரெல்லைக்கு ஒருங்காது.

∴ அத்தொடர் ஒருங்காது. n கூடுதலுற, S_n என்பது 0, a என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையே அலைதலால், அத்தொடர் அலைதொடர் எனப்படும்.

$|r|>1$ எனின், $n\to\infty$ ஆக, $|r^n|\to\infty$.

∴ S_n என்பது முடிவுள்ள ஓரெல்லையை அணுகாது.

∴ அத்தொடர் விரிதொடர் ஆகும்.

உ-ம். $1+\dfrac{1+x}{2+3x}+\left(\dfrac{1+x}{2+3x}\right)^2+\left(\dfrac{1+x}{2+3x}\right)^3+\ldots$

என்னுந் தொடர் ஒருங்கத்தக்கதாய் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

$\dfrac{1+x}{2+3x}<1$ எனின்,

அதாவது $\dfrac{(1+x)^2}{(2+3x)^2}<1$ எனின்,

அதாவது $(1+x)^2-(2+3x)^2<0$ எனின்,

அதாவது $(3+4x)\,(-1-2x)<0$ எனின்,

அதாவது $(x+\frac{3}{4})\,(x+\frac{1}{2})>0$ எனின்,

அத்தொடர் ஒருங்கும்.

∴ x என்பது $-\frac{1}{2}$ என்பதிலும் பெரிதாய் அல்லது $\frac{3}{4}$ என்பதிலுஞ் சிறிதாய் இருத்தல் வேண்டும்.

மடங்கு தசமம்.

மடங்கு தசமமானது ஒருங்குபெருக்கற்றொடரின் ஓர் எடுத்துக் காட்டாகும்.

உதாரணமாக $\cdot\dot{2}$ என்பது

$$\cdot 2+\cdot 02+\cdot 002+\cdot 0002+\ldots\ldots\ldots$$

அல்லது

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\ldots\ldots\ldots$$

என்னுந் தொடரின் முடிவிலிவரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையாகும். இது $\frac{1}{10}$ என்பதைப் பொதுவிகிதமாயுள்ள ஒரு தொடர் ; ஆகவே, அது ஒருங்கும்.

$$\therefore\quad \cdot\dot{2}=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}.$$

இனி

$$\cdot 1\dot{2}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\ldots\ldots\ldots$$

முதலாம் உறுப்பை விலக்கினோமாயின், மீதி, $\frac{1}{10}$ என்பதைப் பொது விகிதமாயுள்ள ஒரு பெருக்கற்றொடராகும்.

S என்பது அம்முழுத்தொடரின் கூட்டுத்தொகையாகுக.

$$\therefore\quad S=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^4}\cdot\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore\quad 10S=1+\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^4}\cdot\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) இலிருந்து, $S-\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\dfrac{2}{10^4}+\ldots\ldots$

(2) இலிருந்து, $10S-1-\dfrac{2}{10}=\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\dfrac{2}{10^4}+\ldots\ldots$

$$\therefore\quad S-\frac{1}{10}=10S-1-\frac{2}{10}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{11}{90}=\frac{12-1}{90}.$$

இது ஒரு மடங்கு தசமத்தை ஒரு பின்னமாக மாற்றுதற்குரிய வழக்கமான விதியை வாய்ப்புக் காட்டுகின்றது.

$x\to a$ ஆக, $f(x)$ இன் எல்லை.

a என்பது ஒரு மெய்யெண்ணுகுக ; $f(x)$ என்பது a யிற்கு அண்மையிலுள்ள (ஆனால் a யில் இருத்தல் வேண்டுமென்பது இன்றிய) x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் வரையறுக்கப்பட்ட x இன் ஒரு சார்பு ஆகுக.

யாதுமொரு சிறு நேர் கணியம் ϵ என்பது தரப்பட $a<x<a+\delta$ ஆயுள்ள எல்லாவற்றிற்கும் $|f(x)-l|<\epsilon$ ஆகுமாறு δ என்னும் ஒரு நேரெண்ணைக் காண்போமாயின், $x\to a+0$ ஆக, $f(x)\to l$ என எழுதுகிறோம்.

$x>a$ யாயுள்ள பெறுமானங்களை மாத்திரம் ஆராய்கின்றோம் என்பதைக் காட்டுதற்கே " $a+0$ " என எழுதுகிறோம்.

ϵ என்பது தரப்பட $a-\delta<x<a$ ஆயுள்ள எல்லாவற்றிற்கும் $|f(x)-l|<\epsilon$ ஆகுமாறு δ என்பதைக் காண்போமாயின், $x\to a-0$ ஆக, $f(x)\to l$ என எழுதுகிறோம்.

இங்கு, $x<a$ என்னும் பெறுமானங்களை மாத்திரம் ஆராய்கின்றோம் என்பதைக் காட்டுதற்கு " $a-0$ " என்பது வழங்கப்படுகின்றது.

$x\to a+0$ ஆயும், $x\to a-0$ ஆயும் இருக்க $f(x)\to 1$ ஆயிருந்தால், " $a-0$ " " $a+0$ " என்பனவற்றை வரையறுக்க வேண்டியதில்லையாதலால், $x\to a$ ஆக, $f(x)\to l$ என எழுதுகின்றோம்.

$x\to a$ ஆக, $f(x)\to l$ எனின், $x=a$ யில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் பற்றி யாதுங் குறிக்கப்படவில்லை. இப்பெறுமானத்திற்கு இருப்பு இருக்கலாம் அல்லது இல்லாதுவிடலாம். அது இருப்பு உள்ளதாயிருந்தாலும் எல்லைக்குச் சமனாகாதிருக்கலாம். $x\to a$ ஆக, எல்லையைப்பற்றிப் பேசும்போது, $x=a$ யில் என்ன நிகழ்கின்றதென்பதைப்பற்றிக் கருதுவதில்லை ; a யிற்கு அண்மையிலுள்ள x இனுடைய பெறுமானங்களையே நாடுகின்றோம். உதாரணமாக

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

என்பதை எடுக்க.

ஆயின் $x=a$ ஆகும்பொழுது $f(x)$ என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை. $x\neq a$ ஆகும்பொழுது $f(x)=x+a$; இது $x\to a$ ஆக a (இனும்பெரிய பெறுமானங்களுக்கூடாக அல்லது சிறிய பெறுமானங்களுக்கூடாக, $2a$ என்பதை அணுகும் என்பது தெளிவு.

$x \to a+0$ ஆக, $f(x)$ என்பது l என்னும் எல்லையையும் $x \to a-0$ ஆக, $f(x)$ என்பது l' என்னும் வேறோர் எல்லையையும் அணுகுவதுமான வகையை ஆரம்பச் சார்புகள் விளக்குவதில்லை. இந்நோக்கத்திற்குச் சிறப்புவகைச் சார்பொன்றை எடுக்கவேண்டும். $f(x)$ என்பது x இலும் பெரிதல்லாத மிகப்பெரிய முழுவெண்ணென வரையறுக்கப்படுக. 1, 2 என்பனவற்றிற்கிடையில் x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $f(x)=1$; ஆயின், $|f(x)-1|$ என்பது 1, 2 என்பனவற்றிற்கிடையிலுள்ள எல்லா x இற்கும் யாதுமொரு நேர்க்கணியத்திலுஞ் சிறிதாகும்.

$$\therefore\ x \to 2-0 \text{ ஆக, } f(x) \to 1.$$

2, 3 என்பனவற்றிற்கிடையிலுள்ள x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $f(x)=2$.

$$\therefore\ x \to 2+0 \text{ ஆக, } f(x) \to 2$$

இவ்வண்ணம் $x \to 2-0$ ஆகவுள்ள எல்லை $x \to 2+0$ ஆகவுள்ள எல்லையோடு ஒன்றாகாது.

சில ஆரம்பச் சார்புகளும் x இன் ஒரு குறித்த பெறுமானத்தினுடைய பக்கங்கள் இரண்டினுள் எதன்கண்ணும் x இன் ஒரு சார்பினது நடத்தை வித்தியாசத்தை வேறொரு முறையிற் காட்டும்.

உதாரணமாக $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ என்பதை எடுக்க.

$x=1$ ஆகும்பொழுது அது வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

$x>1$ ஆகும்பொழுது, 1 இற்கு மிக்க அண்மையில் x இருக்க, $f(x)$ என்பது நேராயும் மிகப்பெரிதாயுமிருக்கும். x என்பதை போதிய அளவு 1 இற்கு அண்மையில் எடுத்தலால், விரும்பும் அளவிற்கு அதனைப் பெரிதாக்கலாம். ஆகவே, $x \to 1+0$ ஆக, $f(x) \to \infty$ என எழுதுகின்றோம்.

$x<1$ ஆகும்பொழுது 1 இற்கு மிக்க அண்மையில் x இருக்க, $\dfrac{1}{x-1}$ என்பது மறைக்குறியோடு பொருந்தும்; அதற்கு மிகப்பெரிய எண் பெறுமானம் இருக்கும்; x என்பதை 1 இற்கு போதிய அளவு அண்மையாக எடுப்பதால் அப்பெறுமானத்தை, விரும்பும் அளவிற்குப் பெரிதாக்கலாம்.

$x \to 1-0$ ஆக, $f(x) \to -\infty$ என எழுதுகின்றோம்.

தான் x என்னுஞ் சார்பிற்கும் $x=\dfrac{\pi}{2}$ இற்கு அண்மையில், இதனோடொத்த உடைமையுண்டு.

$x \to \dfrac{\pi}{2}-0$ ஆக, தான் $x \to \infty$;

$x \to \dfrac{\pi}{2}+0$ ஆக, தான் $x \to -\infty$.

$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ என எடுத்தோமாயின்,

$x \to 1+0$ ஆகவும், $x \to 1-0$ ஆகவும்,

$f(x) \to \infty$.

இங்கு, "1 − 0", "1 + 0" என்பனவற்றை வரையறுக்க வேண்டியதில்லை யாதலால், $x \to 1$ ஆக, $f(x) \to \infty$ என எழுதுகின்றோம்.

$x \to a$ ஆக $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ என்பதன் எல்லை

என்பதன் எல்லை n என்பது ஒரு விகிதமுறுமெண்ணும் a என்பது பூச்சியமல்லாததாயும் இருக்க, $x \to a$ ஆக, $\dfrac{x^n-a^n}{x-a} \to na^{n-1}$ எனக் காட்டுவோம்.

வகை I.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாகுக.

ஆயின், x^n-a^n என்பது n என்னும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பியாகும்; $x=a$ ஆகும்பொழுது அது பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ மீதித் தேற்றத்தால், $x-a$ என்பது x^n-a^n என்பதன் ஒரு காரணியாகும். x^n-a^n என்பது $x-a$ என்பதால் வகுக்கப்படப் பெறும் ஈவு

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1} \text{ என்பதாகும்.}$$

$$\therefore\ x \neq a \text{ ஆகும்பொழுது, } \frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}$$

இது x இன் $n-1$ என்னும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பி; இதற்கு n உறுப்புக்கள் உண்டு; $x \to a$ ஆக, ஒவ்வோர் உறுப்பும் a^n என்பதை அணுகும்.

$$\therefore\ x \to a \text{ ஆக, } \frac{x^n-a^n}{x-a} \to na^{n-1}$$

வகை II.

n என்பது $-m$ இற்குச் சமனான ஓர் மறை முழுவெண்ணாகுக ; ஆயின் m என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணாகும்.

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{\dfrac{1}{x^m}-\dfrac{1}{a^m}}{x-a}=-\frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{1}{x^m a^m}.$$

முதலாம் வகையால், $\dfrac{x^m-a^m}{x-a}\to m a^{m-1}$

$\therefore\ x\to a$ ஆக, $\dfrac{x^m-a^m}{x-a}\dfrac{1}{x^m a^m}\to\dfrac{m a^{m-1}}{a^m a^m}$ அல்லது $m a^{-m-1}$

$\therefore\ x\to a$ ஆக, $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\to n a^{n-1}$

வகை III.

$p,\ q$ என்பன முழுவெண்களாயும், அவற்றுள் q என்பது நேராயுமிருக்க, n என்பது $\dfrac{p}{q}$ யிற்குச் சமனான ஒரு பின்னமாகுக.

$x^{\frac{1}{q}}=X$ ஆயும் $a^{\frac{1}{q}}=A$ யாயுமிருக்க.

ஆயின், $x^{\frac{p}{q}}=X^p,\ a^{\frac{p}{q}}=A^p$

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{X^p-A^p}{X^q-A^q}=\frac{X^p-A^p}{X-A}\times\frac{X-A}{X^q-A^q},$$

$X=A$ என்னும் வகை கருதப்படாமையால்,

$p,\ q$ என்பன முழுவெண்களாயிருத்தலால்,

$X\to A$ ஆக, அதாவது $x\to a$ ஆக

$$\frac{X^p-A^p}{X-A}\to pA^{p-1}$$

$$\frac{X^q-A^q}{X-A}\to qA^{q-1}$$

$$\therefore\ x\to a\ \text{ஆக},\ \frac{x^n-a^n}{x-a}\to\frac{pA^{p-1}}{qA^{q-1}}.$$

ஆனால், $\dfrac{pA^{p-1}}{qA^{q-1}}=\dfrac{p\,A^{p-q}}{q}=\dfrac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1}=na^{n-1}$

$\therefore\ n$ என்பது யாதுமொரு விகிதமுறும் எண்ணாகும்பொழுது $x\to a$ ஆக, $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\to na^{n-1}$.

உ-ம் எல் $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-8}{x^{\frac{1}{3}}-4}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$x\neq 64$ எனின், $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-8}{x^{\frac{1}{3}}-4}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}-64^{\frac{1}{3}}}$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{1}{2}}}{x-64}\times\frac{x-64}{x^{\frac{1}{3}}-64^{\frac{1}{3}}}$$

$$\to\tfrac{1}{2}(64)^{\frac{1}{2}-1}\div\tfrac{1}{3}(64)^{\frac{1}{3}-1}$$

$=\frac{3}{2}(64)^{\frac{1}{6}}=3,\ x\to 64$ ஆகும் பொழுது.

$x\to 0$ ஆக $\dfrac{\text{சைன்}\ x}{x}$ இன் எல்லை.

x என்பது ஆரையனில் $0,\ \dfrac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள ஒரு கோணத்தின் அளவாகுக.

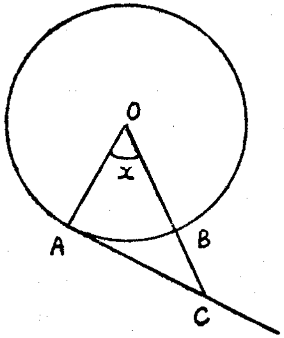
O என்பதை மையமாகவும் r என்பதை ஆரையாகவுமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. AB என்பது மையத்தில் x ஆரையன் என்னும் ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கும் வட்டவில்லாகுக. A யில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலி நீட்டிய OB யை C யிற் சந்திக்க.

ஆயின் $AC=r$ தான் x.

$\triangle\ AOB$ யின் பரப்பளவு $<$ ஆரைச்சிறை OAB யின் பரப்பளவு $<\triangle\ AOC$ யின் பரப்பளவு.

$\therefore\ \frac{1}{2}r^2$ சைன் $x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2$ தான் x.

சைன் $x>0$ ஆதலால், முழுவதையும் $\frac{1}{2}r^2$ சைன் x ஆலே வகுக்கலாம்.



$$\therefore\ 1<\frac{x}{\text{சைன்}\ x}<\frac{1}{\text{கோசை}\ x}.$$

$\therefore$ கணியங்கள் எல்லாம் நேராதலால்

$$1>\frac{\text{சைன்}\ x}{x}>\text{கோசை}\,x.$$

ஆனால், $\text{கோசை}\,x=1-2\,\text{சைன்}^2\dfrac{x}{2}.$

$0,\ \dfrac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையே எல்லா x இற்கும்,

சைன் $x < x$ என்று இதற்குமுன் அறிந்துள்ளோம்.

$$\therefore \text{ சைன் } \frac{x}{2} < \frac{x}{2}.$$

$$\therefore \text{ சைன்}^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}.$$

$$\therefore 1 - 2 \text{ சைன்}^2 \frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$\therefore 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ஆக எல்லா } x \text{ இற்கும் } 1 > \frac{\text{சைன் } x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$x \to 0 \text{ ஆக, } 1 - \frac{x^2}{2} \to 1.$$

$$\therefore x \to +0 \text{ ஆக, } \frac{\text{சைன் } x}{x} \to 1.$$

$$x = -k \text{ ஆகும்பொழுது, } \frac{\text{சைன் } x}{x} = \frac{\text{சைன் } (-k)}{-k} = \frac{\text{சைன் } k}{k};$$

இது $x = k$ ஆகும்பொழுது, $\frac{\text{சைன் } x}{x}$ பெறும் பெறுமானத்தோடு ஒன்றுகும்.

$\therefore x \to -0$ ஆக, $\frac{\text{சைன் } x}{x}$ இனது போக்கு $x \to +0$ ஆகும்பொழுதுள்ள அதன் போக்கோடு ஒன்றுகும்.

$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } \frac{\text{சைன் } x}{x} \to 1.$$

கவனிக்க : x என்னுங்கோணம் ஆரையனில் அளக்கப்படும்போதே இம் முடிபு உண்மையாகுமென்றும் அக்கோணம் பாகையில் அளக்கப்படும் போது அது உண்மையாகாதென்றும் ஞாபகத்தில் வைத்திருப்பது நன்று.

உ-ம். 1. எல்$_{x\to 0}$ $\frac{\text{தான் } x}{x}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$$\frac{\text{தான் } x}{x} = \frac{\text{சைன் } x}{x} \cdot \frac{1}{\text{கோசை } x}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ஆன எல்லா } x \text{ இற்கும் } 0 \le 1 - \text{கோசை } x$$

$$= 2 \text{ சைன்}^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } 1 - \text{கோசை } x \to 0.$$

அதாவது $\quad x \to 0$ ஆக, கோசை $x \to 1$.

$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } \frac{1}{\text{கோசை } x} \to 1.$$

$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } \frac{\text{தான் } x}{x} \to 1.$$

உ-ம். 2. நேர்மாறுசார்பு தன்தலைமைப் பெறுமானத்தைப் பெறுகின்றதெனின்,

எல்$_{x\to 0}$ $\frac{\text{சைன்}^{-1} x}{x}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$y =$ சைன்$^{-1} x$ அல்லது $x =$ சைன் y எனப் பிரதியிடுக.

$$0 < y < \frac{\pi}{2} \text{ எனின், } 0 < \text{சைன் } y < y.$$

$$y \to +0 \text{ ஆக, சைன் } y \to 0.$$

சைன் $(-y) = -$சைன் y ஆதலால்

$y \to 0$ ஆக, சைன் $y \to 0$ என்பது பெறப்படும்.

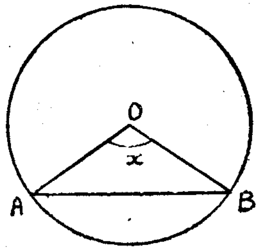
$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } y \to 0.$$

$$y \to 0 \text{ ஆக, } \quad \frac{\text{சைன்}^{-1} x}{x} = \frac{y}{\text{சைன் } y} \to 1.$$

$$\therefore x \to 0 \text{ ஆக, } \quad \frac{\text{சைன்}^{-1} x}{x} \to 1.$$

x என்பது ஆரையனில் யாதுமொரு கோணத்தின் அளவாயின் $x \neq 0$ ஆகும்பொழுது, $|\text{சைன் } x| < |x|$.

$0 < x < \pi$ ஆகுக ; AB என்பது மையத்தில் x ஆரையன் என்னும் ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கின்ற ஒரு வட்டவில்லாகுக ; அவ்வட்டத்தின் ஆரை ஓரலகாகுக.



$\triangle AOB$ யின் பரப்பளவு $<$ ஆரைச்சிறை AOB யின் பரப்பளவு

$$\therefore \text{ சைன் } x < x.$$

x என்பது யாதுமொரு நேர் அல்லது மறைப் பெறுமானத்தைப் பெற்ருல் சைன்x என்பது பெறத்தக்க மிகப் பெரிய எண் பெறுமானம் 1 ஆகும் ; $x = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது இப்பெறுமானம் பெறப்படும். இன்னும், சைன்x பெறுகிற எண் பெறுமானம் எதுவும், 0, $\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற் கிடையேயுள்ள x இன் ஒரு பெறுமானத்துக்குப் பெறப்படும்.

அன்றியும் சைன் $(-x) = -$சைன்x.

$\therefore$ x என்பது பூச்சியத்தைப் பெருதபோது $|$சைன்$x| < |x|$ என்பது பெறப்படும்.

பயிற்சி 18.

1. $x \to 1$ ஆக, $\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{1 - x^{-\frac{2}{3}}}$, $\frac{x^3 - x^{-3}}{x^5 - x^{-5}}$ என்பனவற்றின் எல்லைப் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

2. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $x \to 0$ ஆக, $\frac{1 - \text{கோசை } x}{x^2}$.

(ii) $x \to 0$ ஆக, $\frac{\text{தான் } x - x}{\text{சைன் } x}$.

(iii) $x \to \frac{\pi}{2}$ ஆக, $\frac{1 - \text{சைன் } x}{4x^2 - \pi^2}$.

(iv) $x \to \frac{\pi}{2}$ ஆக, $\frac{1 - \text{சைன் } x}{\text{கோதா}^2 x}$.

(v) $x \to \frac{\pi}{4}$ ஆக, $\frac{\text{கோசை}^5 x - \text{சைன்}^5 x}{\text{கோசை } 2x}$.

(vi) $x \to \frac{\pi}{4}$ ஆக, $\frac{1 - \text{சைன் } 2x}{\text{கோசை } x - \text{சைன் } x}$.

(vii) $x \to 0$ ஆக, $\frac{\text{சைன் } 3x + \text{சைன் } x - 2 \text{ சைன் } 2x}{x \text{ சைன்}^2 x}$.

தொடர்சார்புகள்

$x \to a$ ஆக, $f(x)$ என்னும் ஓர் சார்பின் எல்லையின் உண்மை $x = a$ யில் $f(x)$ இன் பெறுமானத்தைப்பற்றி யாதுங் குறியாதென்று இதற்கு முன் அறிந்துள்ளோம்.

$x \to 0$ ஆக, சார்பு $\frac{\text{சைன் } x}{x} \to 1$; ஆனுல் $x = 0$ ஆகும்பொழுது அதற்கு ஒரு பெறுமானமும் இல்லை ; $x \to 1$ ஆக, சார்பு $\frac{x^2 - 1}{x - 1} \to 2$; ஆனுல், $x = 1$ ஆகும்பொழுது அதற்கு ஒரு பெறுமானமும் இல்லை.

ஆனுல், $x \to 2$ ஆக, சார்பு $\frac{x^2 + 1}{x + 1} \to \frac{5}{3}$; $x = 2$ என்பதிலும் அச்சார்பின் பெறுமானம் $\frac{5}{3}$.

இவ்வண்ணம் பின்வரும் தொடர்சார்பின் வரைவிலக்கணத்திற்கு நடத்தப்படுகின்ருேம் :—

$x > a$ ஆக $f(x) \to$ ஒரு முடிவுள்ள எல்லை l ஆயும், $f(a) = l$ ஆயுமிருந்தால், $f(x)$ என்பது $x = a$ யிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனப்படும் ; இங்கு $f(a)$ என்பது $x = a$ யில் $f(x)$ இன் பெறுமானத்தைக் குறிக்கின்றது ; அதாவது $x \to a$ ஆக, $f(x) \to f(a)$, அல்லது $h \to 0$ ஆக, $f(a + h) \to f(a)$.

$x = a$ யில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதெனின், x ஆனது a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு மிகச் சிறிய கணியத்தாற் கூடுதலுற்ருல் அல்லது குறைதலுற்ருல், $f(a)$ என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து $f(x)$ இன் மாற்றத்தின் எண்பெறுமானமும் மிகச் சிறிதாகும் என்பது இவ் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெறப்படும்.

p, q என்னும் எண்களுக்கிடையே (இரண்டும் உட்பட) x இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x)$ என்பது தொடர்ச்சி உள்ளதெனின், p என்பது q விலுஞ் சிறிதாயிருக்க, $f(x)$ என்பது $p \leqslant x \leqslant q$ என்னும் மூடிய இடைக்குள்ளே தொடர்ச்சியுள்ளதெனப்படும். $f(x)$ ஆனது $x = p$ யிலும் $x = q$ விலுந் தொடர்ச்சியின்றி p, q என்பனவற்றிற்கிடையே எல்லா x இற்குந் தொடர்ச்சியுள்ளதாயின் $f(x)$ என்பது $p < x < q$ என்னுந் திறந்த இடைக்குள்ளே தொடர்ச்சியுள்ளதெனப்படும்.

ஆரம்பச் சார்புகள் குறிப்பிட்ட வகைகளிற் சில சிறப்பு நிலைகளிலொழியப் பொதுவாகத் தொடர்ச்சியுள்ளன. x இன் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பு x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்குந் தொடர்ச்சியுள்ளது. ஒரு விகிதமுறுஞ்சார்பு x இனுடைய, பகுதி பூச்சியமாகும், பெறுமானங்கள் எவையேனும் இருந்தால் அவற்றிற்கன்றி ஏனைப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்குந் தொடர்ச்சியுள்ளது. சைன் x, கோசை x என்னுந் திரிகோண கணிதச் சார்புகள் எல்லா x இற்குந் தொடர்ச்சியுள்ளவை. தான்x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்குகளல்லாத x இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்குந் தொடர்ச்சியுள்ளது. $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றைமடங்காகிய x இன் எப்

பெறுமானத்திற்கும், தான் x என்பது இல்லை ; ஆகையால் அது தொடர்ச்சியற்றது. x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபோது சீகx என்பது தொடர்ச்சியுள்ளது ; x ஆனது π இன் மடங்கல்லாதபோது, கோசீ x, கோதா x என்பன தொடர்ச்சியுள்ளவை.

கேத்திரகணிதத்தின்படி, ஓரிடைக்குள்ளே தொடர்ச்சியுள்ள $f(x)$ என்னும் ஒரு சார்பிற்கு, அவ்விடைக்குள் யாதுமோர் இடைப்பருவத்திற் பென்சிலைத் தாளிலிருந்து எடுக்காது $y=f(x)$ என்னும் வரைபு வரையப் படலாம் என்னும் உடைமை உண்டு.

(a, b) என்னும் ஒரு மூடிய இடைக்குள்ளே தொடர்ச்சியுள்ள $f(x)$ என்னும் ஒரு தொடர்சார்பின் பின்வரும் உடைமைகள் உண்மையெனக் கொள்ளலாம் :—

(i) $f(a)=\alpha$ ஆயும், $f(b)=\beta$ ஆயுமிருந்தால், $f(x)$ என்பது (a, b) இல் x இன் பெறுமானங்களுக்கு α, β என்பனவற்றிற்கு இடையே ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

(ii) $f(x)$ என்பதற்கு (a, b) யில் ஒரு மிகப்பெரிய பெறுமானமும் ஒரு மிகச் சிறிய பெறுமானமும் உண்டு.

தொடர்ச்சியில்லாத ஒரு சார்பு இவ்வுடைமைகளின்றி இருக்கலாம் என்பது $0 \leqslant x \leqslant 2$ இல் $f(x)=\frac{1}{x-1}$ என எடுப்பதால் விளக்கப்படலாம். அச்சார்பு $x=1$ என்பதிலே தொடர்ச்சியின்றியதாய் அவ்விடைக்குள் வேறெவ்வொரு நிலையிலுந் தொடர்ச்சியுள்ளதாகும். $f(x)$ இன் பெறுமானம் 1 இலும் பெரிதாய் 1 இற்குப் போதிய அண்மையில் x இன் ஒரு பெறுமானத்தை எடுப்பதாலே விரும்புமளவு பெரிதாக்கப்படலாம். 1 இலுஞ் சிறிதாய் 1 இற்குப் போதிய அண்மையில் x இன் ஒரு பெறுமானத்தை எடுப்பதால் நாம் விரும்புமளவு (அட்சரகணிதக் கருத்திற்) அது சிறிதாக்கப்படலாம். இவ்வண்ணம் $f(x)$ இற்கு $0 \leqslant x \leqslant 2$ என்பதிலே மிகப் பெரிய பெறுமானமாதல், மிகச் சிறிய பெறுமானமாதல் இல்லை. இன்னும் $f(0)=-1$, $f(2)=1$; 0, 2 என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $\frac{1}{x-1}$ என்பது -1, 1 என்பனவற்றிற்கு இடையே ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது என்பதும் எளிதிற் புலனாகும்.

அத்தியாயம் 2

வகையீடு

$f(x)$ என்பது $x=a$ யாகும்பொழுதும், x என்பது a யினுஞ் சிறிய அல்லது பெரிய பெறுமானங்களை a யிற்கு அண்மையில் எடுக்கும் பொழுதும் வரையப்பட்ட x இன் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக. h என்பது மிகச் சிறிய எண் பெறுமானமுள்ள ஒரு நேர்க்கணியம் அல்லது மறைக்கணியமாயிருக்க, x ஆனது a யிலிருந்து $a+h$ இற்கு மாறுகின்றதெனக் கொள்க. குறைதலை எதிர்க்கூடுதலெனக் கொண்டு x ஆனது a யிலிருந்து $a+h$ இற்குக் கூடுகின்றதெனப் பொதுக் கருத்திற் கூறுகின்றோம். h என்பது x இலுள்ள ஏற்றம் எனப்படும். அவ்வேற்றம் நேராயின், x ஆனது உண்மையாய்க் கூடும் ; அவ்வேற்றம் மறையாயின், x ஆனது உண்மையாய்க் குறையும். $x=a$ ஆகும்பொழுது, அச்சார்பின் பெறுமானம் $f(a)$ ஆகும் ; $x=a+h$ ஆகும்பொழுது, அச்சார்பின் பெறுமானம் $f(a+h)$ ஆகும். x இல் ஏற்றம் h இற்கு ஒத்த $f(x)$ இன் ஏற்றம் $f(a+h)-f(a)$ ஆகும்.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

என்னும் விகிதம் **ஏற்ற விகிதம்** எனப்படும்.

இவ்விகிதம் h என்னும் மாறியின் ஒரு சார்பாகும். $h=0$ ஆகும் பொழுது அவ்விகிதம் $\frac{0}{0}$ ஆக மாறிப் பொருளற்றிருக்கும். $h=0$ என்பதில் அது பொருளற்றிருந்தாலும், $h \to 0$ ஆக, அது முடிவுள்ள எல்லையை அணுகலாம்.

$h \to 0$ ஆக, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to$ ஒரு முடிவுள்ள எல்லை l எனின், $x=a$ என்பதில், $f(x)$ ஆனது x ஐக் குறித்து வகையிடப்படத்தக்கதெனப் படும் ; l என்னும் எல்லை $x=a$ என்பதில் x ஐக் குறித்த $f(x)$ இன் **வகையீட்டுக் குணகம்** அல்லது **பெறுதி** எனப்படும். அது $f'(a)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக, $f(x)=x^3$ என்பதை எடுக்க.

$h=0$ என்னும் வகையை அவாவாமையால், $x=a$ என்பதில் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}=3a^2+3ah+h^2 \quad \text{ஆகும்.}$$

$\therefore$ $h \to 0$ ஆக, ஏற்ற விகிதம் $\to 3a^2$.

$\therefore$ $f'(a)$ என்பது உண்டு ; அது $3a^2$ இற்குச் சமன்.

இப்பொழுது, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ என்பதை எடுக்க.

$x = 0$ என்பதில், ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}};$$

$h \to 0$ ஆக, இது ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகாது.

$\therefore$ $x^{\frac{1}{3}}$ என்பது $x = 0$ என்பதில் வகையிடத் தக்கதன்று.

$f(x)$ என்பது $x = a$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதாயின்,

$f(x)$ என்பது $x = a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளது.

$f(x)$ என்பது $x = a$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதாகுக.

ஆயின், $h \to 0$ ஆக, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \to f'(a)$.

$\therefore$ $h \to 0$ ஆக, $f(a+h) - f(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \to f'(a) \times 0$.

அதாவது, $h \to 0$ ஆக, $f(a+h) - f(a) \to 0$.

அல்லது, $h \to 0$ ஆக, $f(a+h) \to f(a)$.

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது $x = a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளது.

இதன் மறுதலை உண்மையன்று ; அதாவது $f(x)$ என்பது $x = a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனின், $f(x)$ என்பது $x = a$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதென்பது பெறப்படாது.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ என எடுப்பதால் இது விளக்கப்படும். அச்சார்பு $x = 0$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளது ; ஆனால் இது $x = 0$ என்னும் புள்ளியில் வகையிடத்தக்கதன்றென இதற்குமுன் கண்டுள்ளோம்.

பொதுநிலை 'x' இல் வகையீடு.

$f(x)$ என்பது குறித்த ஓரிடையில் x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக.

அவ்விடைக்குள் "x" என்னும் ஒரு நிலையில் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

x என்பதை நிலையாக வைத்து h என்னும் ஏற்றத்தை மாறும்படி செய்தால், ஏற்ற விகிதம் h என்னும் மாறியின் ஒரு சார்பாகும். $h \to 0$ ஆக, அவ்விகிதம் முடிவுள்ள ஓர் எல்லையை அணுகினால், $f(x)$ என்பது "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கதெனப்படும் ; அவ்

வெல்லையானது x ஐக் குறித்த $f(x)$ இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும். அது $f'(x)$ அல்லது $\dfrac{d}{dx} f(x)$ அல்லது $Df(x)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும் ; இங்கு, $\dfrac{d}{dx}$, D என்பன வகையிடுஞ் செய்கையைக் காட்டுங் குறியீடுகள்.

ஆரம்பத்திலுள்ளதன் மாறி t ஆயிருக்க, அச்சார்பு $\phi(t)$ என எழுதப்பட்டால், t ஐக் குறித்த வகையீட்டுக் குணகம் $\phi'(t)$ அல்லது $\dfrac{d}{dt}\phi(t)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

$f(x)$ என்பதற்கு ஒரு குறித்த இடையில் எல்லா x இற்கும் ஒரு மாறாப் பெறுமானம் உண்டெனின், அவ்விடையில் யாதுமொரு புள்ளி x இல் ஏற்ற விகிதம் பூச்சியமாகும் ; ஆகவே, இவ்விடையில் எல்லா x இற்கும் $f'(x) = 0$ ஆகும்.

x^n இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

n என்பது மாறாத ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாகுக ; x^n என்பது வரையறுக்கப்பட்ட யாதுமொரு (பூச்சியமல்லாத) x ஐ எடுக்க.

'x' என்பதில் ஏற்ற நிலை $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$ ஆகும்.

$x + h = X$ அல்லது $h = X - x$ எனப் பிரதியிடுக.

x மாறாதிருக்க, $X \to x$ ஆக, $h \to 0$.

$\therefore$ $X \to x$ ஆக, அதாவது $h \to 0$ ஆக,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{X^n - x^n}{X - x} \to nx^{n-1}$$

$\therefore$ x^n என்பது தான் வரையறுக்கப்பட்ட "x" என்னும் பூச்சியமல்லாத யாதுமொரு நிலையில் வகையிடத்தக்கது. $\dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$.

$n < 0$ ஆக, $x = 0$ ஆகும்பொழுது x^n வரையறுக்கப்படவில்லை.

$n > 0$ எனின், $x = 0$ ஆகும்பொழுது $x^n = 0$.

$x = 0$ என்பதில் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{h^n - 0}{h} = h^{n-1}.$$

$n - 1 < 0$ எனின், $h \to 0$ ஆக, இது முடிவுள்ள ஓர் எல்லையை அணுகாது.

$n > 1$ எனின், $h \to 0$ ஆக, அவ்விகிதம் $\to 0$.

$n = 1$ எனின், அவ்விகிதம் என்றும் 1 இற்குச் சமன்.

$n > 1$ எனின், x^n என்பது $x = 0$ என்பதில் வகையிடத்தக்கது. இந்நிலையில் அதன் வகையீட்டுக் குணகம் பூச்சியமாகும்.

$n = 1$ எனின், இந்நிலையில் அதன் வகையீட்டுக் குணகம் 1 ஆகும்.

$x = 0$ ஆயும் $n > 1$ ஆயும் இருக்கும்பொழுது x^{n-1} என்பது பூச்சியமாயிருத்தலால், $n > 1$ ஆயிருக்க $x = 0$ ஆயிருக்கும்பொழுதும் $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ என்னுஞ் சூத்திரம் உண்மையாகும்.

எல்லா x இற்கும் $\frac{d}{dx}(x^{10}) = 10x^9$.

எல்லா $x > 0$ ஆகும் பொழுது, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

$x > 0$ ஆக, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

சைன்x இன் வகையீட்டுக் குணகம்

x என்பது ஆரையனில் ஒரு கோணத்தின் அளவாகுக. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் சைன் x என்பது வரையறுக்கப் படும்.

'x' என்னும் நிலையிலுள்ள ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{சைன்}\,(x+h) - \text{சைன்}\,x}{h} = \frac{2\,\text{கோசை}\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{சைன்}\,\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \text{கோசை}\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\text{சைன்}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

எல்லா x இற்கும் கோசைx என்பது தொடர்ச்சியுள்ளதெனக் கொண்டால், $h \to 0$ ஆக, கோசை $\left(x+\frac{h}{2}\right) \to$ கோசை x.

இதற்குமுன்னே நிறுவப்பட்ட முடிபால்,

$$h \to 0 \text{ ஆக, } \frac{\text{சைன்}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \to 1.$$

$\therefore\ h \to 0$ ஆக, ஏற்ற விகிதம் $\to$ கோசை x.

$\therefore$ சைன் x என்பது எல்லா x இற்கும் வகையிடத்தக்கது.

x என்பது அக்கோணத்தின் வட்டவளவாயின்,

$$\frac{d}{dx}(\text{சைன்}\,x) = \text{கோசை}\,x.$$

கோசைx இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

"x" என்னும் நிலையிலுள்ள ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{கோசை}\,(x+h) - \text{கோசை}\,x}{h} = -\,\text{சைன்}\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\text{சைன்}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$\to -\,\text{சைன்}\,x,\quad h \to 0 \text{ ஆக,}$$

$\therefore$ எல்லா x இற்கும் கோசைx என்பது வகையிடத்தக்கது.

x என்பது அக்கோணத்தின் வட்டவளவாயின்,

$$\frac{d}{dx}(\text{கோசை}\,x) = -\,\text{சைன்}\,x.$$

தான்x இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்காயிருக்கும்பொழுது, தான்x என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை ; அது x இனுடைய பிற பெறுமானம் ஒவ்வொன்றிற்கும் வரையறுக்கப்படும்.

அது வரையறுக்கப்பட்ட "x" என்னும் யாதுமொரு நிலையிலுள்ள, ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{தான்}\,(x+h) - \text{தான்}\,x}{h} = \frac{\frac{\text{சைன்}\,(x+h)}{\text{கோசை}\,(x+h)} - \frac{\text{சைன்}\,x}{\text{கோசை}\,x}}{h}$$

$$= \frac{\text{சைன்}\,h}{h}\cdot\frac{1}{\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{கோசை}\,x}$$

$$\to \frac{1}{\text{கோசை}^2 x},\quad h \to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore\ x$ என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபொழுது

$$\frac{d}{dx}(\text{தான்}\,x) = \text{சீக}^2 x.$$

கோதா x இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

x ஆனது π இன் மடங்காயிருக்கும்பொழுது கோதாx என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை ; அது x இனுடைய பிற பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வரையறுக்கப்படும்.

அது வரையறுக்கப்பட்ட " x " என்னும் யாதுமொரு நிலையிலுள்ள ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{கோதா}\,(x+h)-\text{கோதா}\,x}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{\text{கோசை}\,(x+h)}{\text{சைன்}\,(x+h)}-\frac{\text{கோசை}\,x}{\text{சைன்}\,x}\right]$$

$$=-\frac{\text{சைன்}\,h}{h}\;\frac{1}{\text{சைன்}\,x\,\text{சைன்}\,(x+h)}$$

$$\to-\frac{1}{\text{சைன்}^2x},\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore$ x என்பது π இன் மடங்கல்லாதபொழுது,

$$\frac{d}{dx}(\text{கோதா}\,x)=-\text{கோசீ}^2x.$$

சீகx இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

x ஆனது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்காயிருக்கும்பொழுது சீக x என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

" x " என்னும் வேறு யாதும் நிலையிலுள்ள, ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{சீக}\,(x+h)-\text{சீக}\,x}{h}=\frac{\text{கோசை}\,x-\text{கோசை}\,(x+h)}{h\,\text{கோசை}\,x\,\text{கோசை}\,(x+h)}$$

$$=\frac{2\,\text{சைன்}\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{சைன்}\,\frac{h}{2}}{h}\;\frac{1}{\text{கோசை}\,x\,\text{கோசை}\,(x+h)}$$

$$\to\frac{\text{சைன்}\,x}{\text{கோசை}^2x},\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore$ x என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபொழுது,

$$\frac{d}{dx}(\text{சீக}\,x)=\frac{\text{சைன்}\,x}{\text{கோசை}^2x}=\text{தான்}\,x\,\text{சீக}\,x.$$

கோசீx இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

x ஆனது π இன் மடங்காயிருக்கும்பொழுது கோசீx என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை. " x " என்னும் வேறு யாதும் நிலையிலுள்ள ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{கோசீ}\,(x+h)-\text{கோசீ}\,x}{h}=\frac{\text{சைன்}\,x-\text{சைன்}\,(x+h)}{h\,\text{சைன்}\,x\,\text{சைன்}\,(x+h)}$$

$$=-\frac{2\,\text{கோசை}\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{சைன்}\,\frac{h}{2}}{h}\;\frac{1}{\text{சைன்}\,x\,\text{சைன்}\,(x+h)}$$

$$\to-\frac{\text{கோசை}\,x}{\text{சைன்}^2x},\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore$ x என்பது π இன் மடங்கல்லாதபொழுது,

$$\frac{d}{dx}(\text{கோசீ}\,x)=-\frac{\text{கோசை}\,x}{\text{சைன்}^2x}=-\text{கோதா}\,x\ \text{கோசீ}\,x.$$

உ-ம். a என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்கும்பொழுது t ஐக் குறித்து சைன்at இன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

h என்பது t இன் ஏற்றத்தைக் குறிக்க.

" t " என்னும் நிலையில் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\text{சைன்}\,a\,(t+h)-\text{சைன்}\,at}{h}$$

$$=\text{கோசை}\left(at+\frac{ah}{2}\right).\frac{\text{சைன்}\left(\frac{ah}{2}\right)}{\left(\frac{ah}{2}\right)}.\ a$$

$$\to a\,\text{கோசை}\,at,\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}(\text{சைன}\,at)=a\,\text{கோசை}\,at.$$

வகையீட்டு விதிகள்

(i) $f\,(x)$ என்பது " x " என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கதாயிருக்க, c என்பது ஒரு மாறிலியாயின், $c\,f(x)$ என்பது " x " என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கது ; அதன் வகையீட்டுக் குணகம் $c\,f'(x)$ ஆகும்.

அதற்குக் காரணம் $c\,f(x)$ இன் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{c\,f(x+h)-c\,f(x)}{h}$$

$$=c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$\to c\,f'(x),\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore \quad u = f(x)$ எனின்,

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{cu}) = \mathbf{c}.\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}.$$

உதாரணமாக, $\frac{d}{dx}(5 \text{ சைன் } x) = 5 \text{ கோசை } x$

(ii) $f(x)$, $\phi(x)$ என்பன "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கன வாயின், $f(x) + \phi(x)$ என்பது "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத் தக்கது ; அதன் வகையீட்டுக்குணகம் $f'(x) + \phi'(x)$ ஆகும்.

அதற்குக் காரணம் "x" என்னும் நிலையில் $f(x) + \phi(x)$ என்பதன் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(x+h) + \phi(x+h) - f(x) - \phi(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

$\to f'(x) + \phi'(x)$, $h \to 0$ ஆக.

$u = f(x)$ ஆயும் $v = \phi(x)$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} + \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}$$

உதாரணமாக, $\frac{d}{dx}(6x^3 + \text{சைன் } 3x + 5)$

$$= 18\, x^2 + 3 \text{ கோசை } 3\, x.$$

(iii) $f(x)$, $\phi(x)$ என்பன "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத் தக்கனவாயின், $f(x)\ \phi(x)$ என்பது "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத் தக்கது ; அதன் வகையீட்டுக் குணகம்

$f(x)\phi'(x) + f'(x)\phi(x)$.

அதற்குக் காரணம் $f(x)\phi(x)$ இன் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(x+h)\,\phi(x+h) - f(x)\,\phi(x)}{h}$$

$$= \phi(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h).\frac{\phi(x+h) - \phi(x).}{h}$$

$f(x)$ என்பது "x" என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கதாய் இருத்த லால், அந்நிலையில் அது தொடர்ச்சியுள்ளது.

$\therefore \quad h \to 0$ ஆக, $f(x+h) \to f(x)$

$\therefore \quad h \to 0$ ஆக, ஏற்ற விகிதமானது,

$f'(x)\,\phi(x) + f(x)\,\phi'(x)$ என்பதை அணுகும்.

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{uv}) = \mathbf{v}\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} + \mathbf{u}\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}.$$

உதாரணம். $\frac{\text{சைன் } t}{t^3}$ என்பதை t ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\text{சைன் } t}{t^3}\right) = \frac{d}{dt}(t^{-3} \text{சைன் } t)$$

$$= \text{சைன் } t\,\frac{d}{dt}(t^{-3}) + t^{-3}\frac{d}{dt}(\text{சைன் } t).$$

$$= \frac{-3 \text{ சைன் } t}{t^4} + \frac{\text{கோசை } t}{t^3}.$$

(iv) $\phi(x)$ என்பது பூச்சியமாதலின்றி "x" என்னும் நிலையில் வகை யிடத்தக்கதாயின், $\frac{1}{\phi(x)}$ என்பது அந்நிலையில் வகையிடத்தக்கது ; அதன் வகையீட்டுக் குணகம்

$$-\frac{\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}$$

அதற்குக் காரணம் "x" என்னும் நிலையில் $\frac{1}{\phi(x)}$ என்பதன் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\frac{1}{\phi(x+h)} - \frac{1}{\phi(x)}}{h} = \frac{-\phi(x+h) + \phi(x)}{h}.\frac{1}{\phi(x)\,\phi(x+h)}$$

$\to -\frac{\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}$, $h \to 0$ ஆக.

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v}}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v}^2}\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}.$$

(v) $f(x)$, $\phi(x)$ என்பன 'x' என்னும் நிலையில் வகையிடத்தக்கதாய் இருக்க, $\phi(x)$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ என்பது அந்நிலையில் வகையிடத்தக்கது ; அதன் வகையீட்டுக் குணகம்

$$\frac{f'(x)\,\phi(x) - \phi'(x)\,f(x)}{\{\phi(x)\}^2}$$

அல்லது $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

இது (3), (4) என்பனவற்றிலிருந்து பெறப்படும்.

$$\frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{v}\frac{du}{dx}+u\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$=\frac{1}{v}\frac{du}{dx}-\frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x-1}\right)=\frac{(x-1)\,3x^2-(x^3+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x-1)^2},\ x\neq 1 \text{ எனின்.}$$

$$\frac{d}{dt}(\text{தான் } t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\text{சைன் } t}{\text{கோசை } t}\right)$$

$$=\frac{\text{கோசை } t\,.\,\text{கோசை } t-\text{சைன் } t\,(-\text{சைன் } t)}{\text{கோசை}^2 t}$$

$$=\frac{1}{\text{கோசை}^2 t}$$

$$=\text{சீக}^2 t,\ \text{கோசை } t\neq 0 \text{ எனின்.}$$

6. சார்பின் சார்பு.

$u=\phi(x)$ என்பது x என்னும் மாறியின் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக; $y=f(u)$ என்பது x என்னும் மாறியின் சார்பாகிய u என்னும் மாறியின் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக. ஆயின், y என்பது ஒரு சார்பின் சார்பாகும். u விற்காக, x பற்றிப் பிரதியிடுவோமாயின், $y=f\{\phi(x)\}$ என்னும் வடிவில் x இன் ஒரு சார்பாக y யைப் பெறுவோம்.

u என்பது "x" என்னும் நிலையில் x ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்கதாயும் $f(u)$ என்பது "u" என்னும் ஒத்த புள்ளியில் u ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்கதாயும் இருந்தால், y என்பது "x" என்னும் நிலையில் x ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்கது; அதன் வகையீட்டுக் குணகம் $f'(u)\times\phi'(x)$ ஆகும்; இங்கு $f'(u)$ என்பது u ஐக் குறித்த $f(u)$ இன் வகையீட்டுக் குணகத்தையும், $\phi'(x)$ என்பது x ஐக் குறித்த $\phi(x)$ இன் வகையீட்டுக் குணகத்தையுங் குறிக்கின்றன.

அதாவது $\qquad \dfrac{d}{dx}f(u)=f'(u)\times\dfrac{du}{dx},$

அல்லது $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}.$

k என்பது x இன் h என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த u வின் ஏற்றத்தைக் குறிக்க.

அதாவது $\qquad k=\phi(x+h)-\phi(x).$

ஆயின், $\qquad h\to 0$ ஆக, $k\to 0$; $\dfrac{k}{h}\to\phi'(x).$

h என்பது பூச்சியமல்லாதபோது, k என்பது பூச்சியமன்றெனக் கொள்வோம்; அதாவது, x இலே மாற்றம் இருக்கும்போது $\phi(x)$ இலும் ஒரு மாற்றம் உண்டெனக் கொள்வோம். இது ஆரம்பச் சார்புகளில் உண்மையாகும். இவ்வாறு கொள்ளுதல் k யினுற் வகுத்தற்கு இடந் தரும்.

u வில் k என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த $f(u)$ என்பதின் ஏற்றம் $f(u+k)-f(u)$ ஆகும்.

$f(u)$ என்பது u வைக் குறித்து வகையிடத்தக்கதாயிருத்தலால்,

$$k\to 0 \text{ ஆக, } \frac{f(u+k)-f(u)}{k}\to f'u.$$

x ஐக் குறித்த y யின் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(u+k)-f(u)}{h}=\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\cdot\frac{k}{h}$$

$$=f'(u)\times\phi'(x),\ h\to 0 \text{ ஆக.}$$

$\therefore$ x இன் ஒரு சார்பாகக் கொள்ளப்பட்ட y யானது x ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்கது; அதன் வகையீட்டுக் குணகம்

$$f'(u)\times\phi'(x) \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}.$

அதுபோல y என்பது u வின் வகையிடத்தக்க சார்பாயும், u என்பது v யின் வகையிடத்தக்க சார்பாயும், v என்பது x இன் வகையிடத்தக்க சார்பாயுமிருந்தால்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dx}.$$

உ–ம். சைன்$\sqrt{x}$ என்பதை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$y=$ சைன்$\sqrt{x}$ எனின், $y=$ சைன் u;
இங்கு $u=\sqrt{x}$.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=\text{கோசை}\,u\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\text{கோசை}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

7. நேர்மாறு சார்பு.

y யானது $y=f(x)$ என்னும் வடிவில் x இன் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாய்த் தரப்பட்டால், x என்பது $x=\phi(y)$ என்னும் வடிவில் y யின் ஓர் சார்பாக உணர்த்தப்படல் கூடும். ஆயின், ϕ என்னுஞ் சார்பு f இற்கு நேர்மாறு சார்பெனப்படும்.

உதாரணமாக, $y=x^2$ ஆக, x என்பது நேராயிருந்தால், $x=\sqrt{y}$. அல்லது $y=$ சைன் x ஆக, x ஆனது $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையில், (இரண்டும் உட்படக்) கிடந்தால், $x=$ சைன்^{-1}y.

$y=f(x)$ என்னுந் தொடர்பு x என்பதை $x=\phi(y)$ என்னும் வடிவில் y யின் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாக வரையறுப்பதாகுக. ஆயின், $f'(x)$ என்பது 'x' என்னும் நிலையிற் பூச்சியமாகாது இருப்பைக் கொள்ளுமெனின், $\phi'(y)$ என்பதும் 'y' என்னும் ஒத்த புள்ளியில் இருப்பைக் கொள்ளும் ; அது $\frac{1}{f'(x)}$ என்பதற்குச் சமனாகும்.

அதாவது $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

h என்பது x இல் ஓர் ஏற்றத்தையும் k என்பது y யில் ஒத்த ஏற்றத்தையுங் குறிக்க.

$$y+k=f(x+h)\,;\quad x+h=\phi(y+k).$$

x ஐக் குறித்த $f(x)$ இன் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{h}$$

$$\to f'(x),\ h\to 0 \text{ ஆக,}$$

y யைக் குறித்த $\phi(y)$ யின் ஏற்ற விகிதம்

$$\frac{\phi(y+k)-\phi(y)}{k}=\frac{h}{k}$$

$$\to\frac{1}{f'(x)},\ h\to 0 \text{ ஆக,}$$

$$\text{அதாவது } k\to 0 \text{ ஆக.}$$

$$\therefore \phi'(y) \text{ என்பது உண்டு ; அது } \frac{1}{f'(x)} \text{ இற்குச் சமன்.}$$

சைன்^{-1}x இன் வகையீட்டுக் குணகம்.

$y=$ சைன்^{-1}x ஆகுக ; இங்கு நேர்மாறு சார்பானது தனது தலைமைப் பெறுமானத்தை, அதாவது $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையில், (இரண்டும் உட்படக்) கிடக்கின்ற தனிப்பெறுமானத்தைப் பெறுக.

ஆயின், $$x=\text{சைன்}\,y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\text{கோசை}\,y\,;$$

$$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \text{ எனின், அதாவது } -1<x<1 \text{ எனின்,}$$

இது பூச்சியமன்று.

$$\therefore -1<x<1 \text{ எனின், } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\text{கோசை}\,y}.$$

$\therefore$ கோசை y யானது ஆராயப்பட்ட y யினுடைய பெறுமானங்களுக்கு நேராயிருத்தலால்,

$$-1<x<1 \text{ எனின், } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

அல்லது $$-1<x<1 \text{ எனின், } \frac{d}{dx}(\text{சைன்}^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

தான்^{-1}x இன் வகையீட்டுக்குணகம்.

$y=$ தான்^{-1}x ஆகுக ; இங்கு நேர்மாறு சார்பிற்கு அதனுடைய தலைமைப் பெறுமானங் கொடுக்கப்படுக.

ஆயின் $$x=\text{தான்}\,y\,;\ \frac{dx}{dy}=\text{சீக}^2y=1+x^2.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\,;$$

அல்லது, எல்லா x இற்கும் $$\frac{d}{dx}(\text{தான்}^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

உ–ம். 1. தான்$^{-1}(x^2)$ என்பதைx ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$y=$ தான்^{-1}u ஆகுக ; இங்கு $u=x^2$ ஆகுக.

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\times 2x=\frac{2x}{1+x^4}.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{தான்}^{-1}x^2) = \frac{2x}{1+x^4}.$$

உ-ம். 2. $(\text{சைன்}^{-1}t)^2\sqrt{(1-t^2)}$ என்பதை t ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\frac{d}{dt}\left\{(\text{சைன்}^{-1}t)^2\sqrt{(1-t^2)}\right\}$$

$$= \sqrt{(1-t^2)}\frac{d}{dt}(\text{சைன்}^{-1}t)^2 + (\text{சைன்}^{-1}t)^2\frac{d}{dt}\sqrt{(1-t^2)}.$$

$u = \text{சைன்}^{-1}t$ ஆயும் $t^2 \neq 1$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\frac{d}{dt}(u^2) = 2u\frac{du}{dt} = \frac{2\,\text{சைன்}^{-1}t}{\sqrt{(1-t^2)}}.$$

$v = (1-t^2)$ ஆயும் $t^2 \neq 1$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\frac{d}{dt}\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dt} = \frac{-2t}{2\sqrt{(1-t^2)}},$$

$\therefore \quad -1 < t < 1$ எனின்,

$$\frac{d}{dt}\{(\text{சைன்}^{-1}t)^2\sqrt{(1-t^2)}\} = 2\,\text{சைன்}^{-1}t - \frac{t(\text{சைன்}^{-1}t)^2}{\sqrt{(1-t^2)}}.$$

சார்பின் பராமான வகைக்குறிப்பு

x, y என்னும் இரண்டையும் t என்னும் ஒரு மாறுஞ் சாராமாறியினுடைய சார்புகளாக உணர்த்துதலால் y என்பதைச் சாராமாறிபற்றி x இன் ஒரு சார்பாகக் குறிப்பது சில வேளைகளில் இசைவாகும். உதாரணமாக, x, y என்பன $x^2 + y^2 = 25$ என்னுந் தொடர்பினுல் இணைக்கப்படும்பொழுது, $x = 5$ கோசை t என்றும் $y = 5$ சைன் t என்றும் எழுதலாம். t இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும், மேலுள்ள தொடர்பு தீர்க்கப்படும்.

$f(t)$, $\phi(t)$ என்பன t ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்கனவான $x = f(t)$, $y = \phi(t)$ என்னும் வடிவுகளில் x, y என்பன t இனுடைய சார்புகளாய் இருக்கின்றன எனக் கொள்க. அச்சமன்பாடுகளுக்கு இடையே t யை நீக்கினுல், x, y என்பனவற்றிற்கிடையே ஒரு நேரான தொடர்பைப் பெறுவோம்; p இது y யை x இன் சார்பாக வரையறுக்கின்றதெனக் கொள்ளப்படலாம். y யானது இவ்வண்ணம் x இன் சார்பாகக் கொள்ளப்படும்பொழுது, x ஐக் குறித்த y யின் வகையீட்டுக் குணகம் (அது இருக்கும் பொழுதெல்லாம்) t யினது நீக்கத்தைச் செய்யாமலே எழுதப்படலாமென்பதைக் காட்டுவோம்.

அப்பொழுது

$$\frac{dx}{dt} = f'(t).$$

ஆகவே, t யை x இன் ஒரு சார்பாகக் கொண்டால், $f'(t)$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், $\frac{dt}{dx}$ என்பதற்கு இருப்பு உண்டு; அது $\frac{1}{f'(t)}$ என்பதற்குச் சமனுகும்.

ஆயின், t என்பது x இன் ஒரு சார்பாயிருக்க, y என்பது t இன் ஒரு சார்பாகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\phi'(t)}{f'(t)},\ f'(t) \neq 0 \text{ எனின்},$$

a என்பது ஒரு மாறிலியாக, $x = a$கோசை t, $y = a$சைன் t என்பனவற்றை எடுக்க, சைன் $t \neq 0$ எனின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,\text{கோசை}\,t}{-a\,\text{சைன்}\,t} = -\text{கோதா}\,t.$$

பயிற்சி 19

1. பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக:

(i) $\frac{x^2+1}{(3x+1)^2}$; (ii) $\frac{\sqrt{(x+1)}}{(x-1)^2}$; (iii) $\frac{x(x+1)^2}{(2x+1)^3}$.

ஒவ்வொரு வகையீட்டுக் குணகமும் பூச்சியமாகின்ற x இனுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

2. பின்வருவனவற்றை t யைக் குறித்து வகையிடுக:

(i) $\text{சைன்}^4\sqrt{t}$; (ii) $\frac{\text{சைன்}\,t + \text{கோசை}\,t}{\text{சைன்}\,t - \text{கோசை}\,t}$;

(iii) $\frac{\text{சைன்}\,t}{\sqrt{(2+\text{கோசை}\,t)}}$; (iv) சைன 3$t$ $\text{கோசை}^3\,2t$;

(v) $\frac{\text{சைன்}^2\,t}{\text{கோசை}^3\,5t}$.

3. பின்வருவனவற்றை y யைக் குறித்து வகையிடுக:

(i) $\text{தான்}^2y\ \text{சீக}\ y$; (ii) $\sqrt{(\text{தான்}^2y + \text{சீக}^2y)}$

(iii) $\frac{\text{தான்}\ y}{\sqrt{(1+2\ \text{சீக}y)}}$.

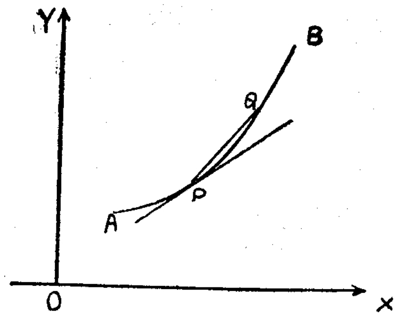
4. x ஐக் குறித்துப் பின்வருவனவற்றை வகையிடுக:

(i) $\left(\frac{\text{சைன்}^{-1}x}{1-x^2}\right)^2$; (ii) $(\text{தான்}^{-1}\sqrt{x})^2$; (iii) $\text{தான்}^{-1}\left(\text{தான்}\frac{x}{2}\right)$.

5. $x = 2$ கோசை $t +$ கோசை$2t$ ஆயும் $y = 2$சைன்$t +$ சைன் $2t$ ஆயுமிருக்க, கோசை $\frac{t}{2}$, சைன் $\frac{3t}{2}$ என்பன பூச்சியமல்ல வெனின், $\frac{dy}{dx} = -\text{கோதா}\,\frac{3t}{2}$ எனக் காட்டுக.

கேத்திரகணித முறைக் கருத்து

$f(x)$ என்பது x இனுடைய ஒரு குறித்த பெறுமான வீச்சிற்குள் ($a \leqslant x \leqslant b$ என்க) x ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்க ஓர் ஒற்றைப்பெறுமானச் சார்பாகுக. $y = f(x)$ என்னும் வகை y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு அதனை ஒன்றின் மேற்பட்ட ஒரு புள்ளியில் வெட்டாதவாறு தொடர்ச்சியுள்ள AB என்னும் ஒரு வளையியாம். P என்பது x ஐக் கிடைக்கூறுகவுள்ள அவ்வளை கோட்டின் ஒரு புள்ளியாகுக. Q என்பது $x+h$ என்பதைக் கிடைக்கூறுகவுள்ள அவ்வளையியின் ஓர் அயற்புள்ளியாகுக; இங்கு, h என்பது நேராய் அல்லது மறையாய் இருக்கலாம்; ஆனால், அதற்கு மிகச்சிறிய எண்பெறுமானம் உண்டு. P யின் ஆள்கூறுகள் x, $f(x)$ என்பன; Q வின் ஆள்கூறுகள் $x+h$, $f(x+h)$ என்பன; PQ என்னும் நாணின் சரிவு $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ஆகும்.



இது 'x' என்னும் புள்ளியில், x ஐக் குறித்த $f(x)$ இன் ஏற்ற விகிதமாகும்.

$\therefore$ $h \to 0$ ஆக, அல்லது Q என்பன P யோடு பொருந்தும்படி இயங்க PQ வின் சரிவு $\to f'(x)$.

அதாவது, Q என்பது P யோடு பொருந்தும்படி இயங்க, PQ என்னும் நாண் $f'(x)$ என்னுஞ் சாய்வோடு ஒரு குறித்த எல்லை நிலையை அணுகும். கேத்திரகணிதத்தில், இந்த எல்லைநிலையிலுள்ள PQ என்னும் நாண் அவ்வளையிககு P யிலுள்ள தொடலி என வரையறுக்கப்படும்.

ஆகவே, $f'(x)$ என்பதற்கு அவ்வளையியின் ஒரு புள்ளியில் இருப்பு உண்டெனின், அப்புள்ளியில் அவ்வளையிக்கு y அச்சிற்குச் சமாந்தரமின்றிய ஒரு தொடலி உண்டு; இத்தொடலியின் சரிவு $f'(x)$ ஆகும்.

உ-ம். 1

$x=1$ என்னும் புள்ளியில் $y=x^3+x^2+1$ என்னும் வளையியினது தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க; அத்தொடலி மறுபடியும் அவ்வளையியை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைத் துணிக.

$$y = x^3 + x^2 + 1.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x.$$

$x=1$ என்பதில், $x=1$, $y=3$ ஆகும்பொழுது தொடலியின் சரிவு 5 ஆகும்.

$\therefore$ (1, 3) என்னும் புள்ளியிலே தொடலியின் சமன்பாடு

$$y-3 = 5(x-1) \text{ அல்லது } y = 5x-2.$$

$y=5x-2$ என்னும் கோடும் $y=x^3+x^2+1$ என்னும் வளையியும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளினுடைய கிடைக்கூறுகள்,

$$x^3+x^2+1 = 5x-2,$$

அல்லது $x^3+x^2-5x+3=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

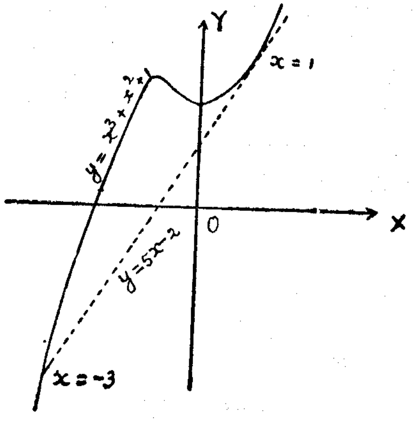
இது x இல் ஒரு முப்படிச்சமன்பாடு; இதற்கு மூன்று மூலங்கள் இருக்கலாம்; அதனிலுங் கூடியதொகை இருத்தல் இயலாது. ஆனால், ஒருவளையிக்கு ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடலி அவ்வளையியை அப்புள்ளியில் இரண்டு அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட பொருந்து புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றமையால், அம்முப்படிச் சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்த அளவில் ஒவ்வொன்றும் 1 இற்குச் சமனான இரண்டு பொருந்து மூலங்களாதல் இருத்தல் வேண்டுமென்பது பெறப்படும். இது எளிதாக வாய்ப்புப் பார்க்கப்படலாம்.

$$\begin{aligned} x^3+x^2-5x+3 &= x^2(x-1)+2x(x-1)-3(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+2x-3) \\ &= (x-1)^2(x+3). \end{aligned}$$

ஆகவே, அச்சமன்பாட்டிற்கு ஒவ்வொன்றும் 1 இற்குச்சமனான இரண்டு பொருந்து மூலங்களும் -3 என்னும் வேறொரு மூலமும் உண்டு. ஆகவே $x=1$ என்பதில் அவ்வளையியினது தொடலி மறுபடியும் அவ்வளையியை $x=-3$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டும்.

உ-ம். 2.

$x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு அதன்மீதுள்ள (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



A (x_1, y_1) என்பது அவ்வட்டத்தின்மீது ஒரு புள்ளியாகுக. A என்னும் புள்ளியிருக்கின்ற அவ்வட்டத்துச் சிறுவில்லொன்றின்மீது, y என்பது $y^2=a^2-x^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்ட x இன் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகும்.

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(a^2 - x^2) = -2x.$$

இனி,
$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \times \frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore\quad y\frac{dy}{dx} = -x.$$

∴ அவ்வில்லின்மீது $y \neq 0$ ஆன யாதுமொரு புள்ளி (x, y) யில் அவ்வட்டத்தினது தொடலி y அச்சிற்குச் சமாந்தரமின்றியது :

அதன் சரிவு $-\dfrac{x}{y}$ ஆகும்.

∴ $y_1 \neq 0$ எனின், A யிலுள்ள தொடலியின் சரிவு

$-\dfrac{x_1}{y_1}$ ஆகும்.

∴ A இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

அல்லது
$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

(x_1, y_1) என்பது $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் வட்டத்தின்மீது கிடக்கின்றமையால், (x_1, y_1) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு, $y_1 \neq 0$ எனின், $xx_1 + yy_1 = a^2$ ஆகும்.

$y_1 = 0$ எனின், அவ்வட்டத்தின்மீது A யிற்கு மிக்க அண்மையிலுள்ள (x_2, y_2) என்னும் புள்ளியை ஆராய்க. ஆயின், y_2 என்பது பூச்சியமன்று ; அதற்கு மிகச்சிறிய எண்பெறுமானம் உண்டு ; x_2 என்பது x_1 இலிருந்து ஒரு மிகச்சிறிய கணியத்தால் வேறுபடும். B யிலுள்ள தொடலியின் சரிவு மிகப் பெரிய எண்பெறுமானமுள்ள $-\dfrac{x_2}{y_2}$ ஆகும். B என்பது A யோடு பொருந்துமாறு இயங்க, B யிலுள்ள தொடலியின் சரிவின் எண்பெறுமானம் ∞ ஐ அணுகும்.

∴ அவ்வட்டத்திற்கு A யிலுள்ள தொடலி y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

∴ அதன் சமன்பாடு $x - x_1 = 0$.

$xx_1 + yy_1 = a^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில் $y_1 = 0$ எனப் பிரதியிட்டால், $xx_1 - a^2 = 0$ என்பதைப் பெறுவோம். ஆனால், $y_1 = 0$ எனின் $x_1^2 = a^2$.

∴ அச்சமன்பாடு $xx_1 - x_1^2 = 0$ அல்லது $x - x_1 = 0$ ஆகும்.

∴ அவ்வட்டத்தின் மீது யாதுமொரு புள்ளி (x_1, y_1) என்பதில் உள்ள தொடலி.

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

உ ம். 3. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவில் $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(x, y) என்பன அப்புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகளாயின், $x = at^2$, $y = 2at$;

$$\therefore\quad t \neq 0 \text{ எனின், } \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

$t \neq 0$ எனின், $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலி

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

அல்லது
$$ty = x + at^2.$$

$t = 0$ ஆகும்பொழுது, அப்பரவளைவின்மீதுள்ள ஒத்த புள்ளியினுடைய ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆகும். δ என்பது மிகச்சிறிய ஓர் எண்பெறுமானம் எனின் $t = \delta$ என்னும் ஒரு புள்ளியில், சரிவு $\dfrac{1}{\delta}$ ஆகும். $\delta \to 0$ ஆக, அதன் எண்பெறுமானம் முடிவிலியை அணுகும்.

ஆகவே, அவ்வளையிக்கு $t = 0$ என்பதிலுள்ள தொடலி y அச்சிற்குச் சமாந்தரம். அதன் சமன்பாடு $x = 0$; $t = 0$ ஆகும்பொழுது இது $ty = x + at^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டோடு ஒன்றுகும். ஆகவே, யாதுமொரு புள்ளி $(at^2, 2at)$ என்பதிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $ty = x + at^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

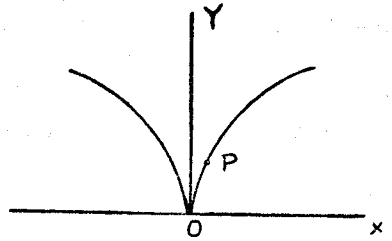
$x = a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளதெனினும், அது $x = a$ என்பதில் வகையிடத்தகாததாயிருக்கக் கூடுமென்று இதற்குமுன் கண்டுள்ளோம். இம்முடிபின் கேத்திரகணிதவுரையானது ஒரு புள்ளிக் கூடாகச் செல்லுந் தொடர்ச்சியுள்ள ஒரு வளையிக்கு அப்புள்ளியில் ஒரு தொடலியும் இல்லாது போகலாம் என்பதே.

$x^{\frac{1}{3}}$ என்பது $x = 0$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதாயினும் அப்புள்ளியில் வகையிடத்தக்கதன்று. ஆகவே, $y = x^{\frac{1}{3}}$ என்னும் வளையி $x = 0$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனினும் அப்புள்ளியில் அதற்குத் தொடலியில்லை. அவ்வளையியின் வடிவம் ஆராயப்படும்போது இது

விளக்கப்படும். $x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2$ ஆயிருத்தலால், $x = k$ ஆகும்பொழுதும், $x = -k$ ஆகும்பொழுது y யிற்கு ஒரே பெறுமானம் உண்டு. ஆகவே, அவ்வளையி y அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீருள்ளதாகும். $x = 0$, $y = 0$ ஆயும், $x \neq 0$ ஆயுமிருக்கும்பொழுது y என்பது நேராகும். ஆகவே அவ்வளையி உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும்; அது உற்பத்தியிலிருந்து செல்லும் இரண்டு கிளைகளால் அமையும் ; ஒரு கிளை முதற் காலியிலும் மற்றையது இரண்டாங் காலியிலுமாகக் கிடக்கும்.

முதலாங் காலியிலுள்ள கிளையின்மீது உற்பத்திக்கு மிக்க அண்மையில் P என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுக்க.

P யின் கிடைக்கூறு h ஆயின், அதனுடைய நிலைக்கூறு $h^{\frac{2}{3}}$ ஆகும். $h \to 0$ ஆக, அதாவது P என்பது 0 ஓடு பொருந்தும்படி இயங்க, OP யின் சரிவு $\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \to \infty$. ஆகவே, முதலாங் காலியிலுள்ள கிளைக்கு உற்பத்தியில் y அச்சே தொடலியாகும். சமச்சீரால் அதே உடைமை மற்றைக்கிளைக்கும் உண்மையாதல் வேண்டும். இவ்வண்ணம் O விற் சந்திக்கின்ற இரண்டு கிளைகளுள் ஒவ்வொன்றிற்கும் உற்பத்தியில் y அச்சே தொடலியாகும் ; அவ்வளையி முழுவதுமாக எடுக்கப்பட அதற்கு உற்பத்தியில் ஒரு தொடலியும் இல்லை என்பது எளிதிற் புலனாகும். ஒரு கிளையின்மீது O விற்கு அணித்தாக ஒரு புள்ளி P யையும் மற்றைக் கிளையின்மீது O விற்கு அணித்தாய் ஒரு புள்ளி Q வையும் எடுத்தோமாயின், P, Q என்பன O வோடு பொருந்துமாறு இயங்க, PQ என்னும் நாண் ஒரு குறித்த எல்லை நிலையை அணுகாது.



வகையீடு.

$y = f(x)$ என்பது x இன் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாகுக. x இன் ஒரு சிறிய மாறும் ஏற்றம் δx ஆற் குறிக்கப்படுக ; $f(x)$ இலுள்ள ஒத்த சிறிய ஏற்றம் δf என்பதனாற் குறிக்கப்படுக. δx என்னுங் குறியீடு x இன் மாறும் ஏற்றத்திற்காக வழங்கப்படுகின்ற போதிலும் அவ்வேற்றத்தின் மாறலை எடுத்து நோக்கின் 'x' ஐச் சாராது.

$$\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$$

'x' என்னும் புள்ளியில் ஏற்றவிகிதம் $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

$$\therefore \quad \delta x \to 0 \text{ ஆக, } \frac{\delta f}{\delta x} \to f'(x)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta f}{\delta x} = f'(x) + \eta, \quad \delta x \to 0 \text{ ஆக, } \eta \to 0$$

$$\therefore \quad \delta f = \{f'(x) + \eta\} \ \delta x = f'(x)\,\delta x + \eta\,\delta x.$$

$f'(x)\,\delta x$ என்னும் உறுப்பிற்கு δx என்னும் ஒரு சிறுகணியமே அதன் சினையாக இருக்கும் ; ஆனால் $\eta\,\delta x$ என்னும் உறுப்பு இரு சிறு கணியங்களின் பெருக்கமாகும். $f'(x)\,\delta x$ என்பது முதலாம் வரிசையிலுள்ள ஒரு சிறு கணியமென்றும், $\eta\,\delta x$ என்பது இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள ஒரு சிறு கணியமென்றும் கூறுகின்றோம். $f'(x)\,\delta x$ என்பது 'x' என்னும் புள்ளியில் δx என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த $f(x)$ இன் வகையீடு என வரையறுக்கப்படுகின்றது ; அது df என்பதனாற் குறிக்கப்படுகின்றது.

$$df = f'(x)\,\delta x.$$

இவ்வண்ணம் வரையறுக்கப்பட்ட $f(x)$ இன் வகையீடு x, δx என்னும் இரண்டு பராமானங்களைச் சார்கின்றது.

இப்போது, x என்பதே x இன் ஒரு சார்பெனக் கொள்ளப்பட்டால் அதன் வகையீட்டுக் குணகம் 1.

$\therefore$ $f(x) = x$ எனின், $f'(x) = 1$; ஆகவே, x இன் வகையீடு 1.
$\delta x = dx$.

இவ்வண்ணம் வகையீட்டின் வரைவிலக்கணத்தின்படி, x என்பது பராமானமாயிருக்கும் பொழுது $dx = \delta x$.

$\therefore f(x)$ என்பது பராமானம் x இன் வகையிடத்தக்க யாதுமொரு சார்பாயிருக்கும்பொழுது,

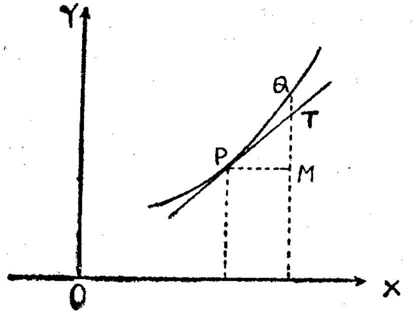
$$df = f'(x)dx.$$

$\therefore f'(x)$ என்பது df, dx என்பனவற்றின் விகிதமாகும்.

அல்லது $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

x ஐக் குறித்த x இன் சார்பின் வகையீட்டுக் குணகத்தை வரையறுத்தபோது, x இன் வகையீட்டுக் குணகத்தை $\frac{d}{dx} f(x)$ என்பதாற் குறித்தோம் ; இங்கு $\frac{d}{dx}$ என்பது வகையிடுஞ் செயலைக் குறிக்குங் குறியீடு. இப்போது வகையீட்டுக் குணகமானது df, dx என்பனவற்றின் விகிதமாகக் கொள்ளப்படுமாறு df, dx என்பனவற்றிற்குக் கருத்துக் கொடுத்துள்ளோம்.

df, δf என்பனவற்றின் வேறுபாடு பின்வருமாறு கேத்திரகணித முறைப்படி விளக்கப்படலாம்.



P என்பது $y=f(x)$ என்னும் வளையியின் மீதுள்ள (x, y) என்னும் புள்ளியாகுக ; $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பது அவ்வளையியின் மீதுள்ள ஓர் அயற்புள்ளியாகுக. PM, QM என்பன x, y அச்சுக்களுக்கு முறையே சமாந்தரமாக வரையப்பட்டால், $PM=\delta x$, $MQ=\delta y$. அவ்வளையிக்கு P யிலுள்ள தொடலி MQ வை T யிற் சந்தித்தால்,

$$f'(x)=\frac{MT}{PM}=\frac{MT}{\delta x}=\frac{MT}{dx}.$$

$$\therefore \frac{df}{dx}=\frac{MT}{dx}.$$

$$\therefore df=MT.$$

ஆனால், $\delta f=\delta y=MQ$.

அதாவது, x இல் PM என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த $f(x)$ இன் வகையீடு MT ; x இல் அதே ஏற்றத்திற்கு ஒத்த $f(x)$ இன் ஏற்றம் MQ.

u, v என்பன x இனுடைய வகையிடத்தக்க சார்புகளாயின்,

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

இரு பக்கங்களையும் dx ஆற் பெருக்கினால்,

$$d(u+v)=du+dv,$$

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

மீட்டும் மீட்டும் வகையிடுதல்.

$f(x)$ என்பது x இன் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாயும், அதன் வகையீட்டுக் குணகம் $f'(x)$ என்பதும் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாயும் இருந்தால், $f(x)$ என்பது x ஐக் குறித்து இரண்டாம் வரிசைக்கு வகையிடத்தக்க சார்பெனப்படும் ; $f'(x)$ இன் வகையீட்டுக் குணகம் $f''(x)$ அல்லது $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f$ அல்லது $\frac{d^2f}{dx^2}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும். இதனிலும் உயர்ந்த வரிசைகளினுடைய வகையீட்டுக் குணகங்கள் இதனோடொத்த வழியில் வரையறுக்கப்படலாம்.

$x\neq 0$ ஆயும், p என்பது ஒருமாறிலியாயுமிருக்க,

$f(x)=x^p$ எனின், $f'(x)=px^{p-1}$, $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$,

$f'''(x)=p(p-1)(p-2)x^{p-3}$. இவ்வாறே பிறவும் ;

பொதுவாக $f^n(x)=p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n}$.

இங்கு $f^n(x)$ என்பது $f(x)$ இன் n ஆம் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் குறிக்கின்றது.

$f(x)=$ சைன் x எனின், $f'(x)=$ கோசை x, $f''(x)=-$ சைன் x,

.... பொதுவாக $f^n(x)=$ சைன் $\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x)=$ கோசை x எனின், $f^n(x)=$ கோசை $\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)=(2x+1)^{-1}$ எனின்,

$$f'(x)=-1.2\,(2x+1)^{-2},$$

$$f''(x)=(-1)(-2).2^2(2x+1)^{-3}.$$

....

....

....

பொதுவாக, $f^n(x)=(-1)\,(-2)\,\dots\,(-n).2^n(2x+1)^{-n-1}$

$$=\frac{(-1)^n n!2^n}{(2x+1)^{n+1}}.$$

$x=at^2$ ஆயும், $y=2at$ ஆயுமிருந்தால்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{t}$$

$$\therefore \ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\times\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2at}=-\frac{1}{2at^3}.$$

கவனிக்க : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ என்பது $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$ என்பதற்குச் சமனின்று.

பயிற்சி 19

1. $y=(\text{சைன்}^{-1}x)^2$ எனின்

   $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$$ எனக் காட்டுக.

2. $y=\text{சைன்}\sqrt{x}$ எனின்,

   $$4x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$$ எனக் காட்டுக.

3. a என்பது ஒரு மாறிலியாயும், t என்பது ஒரு மாறியாயுமிருக்க $x=a\ (t+\text{சைன்}\ t)$ ஆயும், $y=a\ (1-\text{கோசை}\ t)$ ஆயுமிருந்தால், t என்பது π இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபோது,

   $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\ \text{சீக}^4\ \frac{t}{2}$$ எனக் காட்டுக.

4. $x=\text{கோசை}\ t$ ஆயும், $y=2\ \text{சைன்}\ t$ ஆயுமிருந்தால்,

   $$y^3\frac{d^2y}{dx^2}+16=0$$ எனக் காட்டுக.

5. A, B என்பன x ஐச் சாராதிருக்க $(2x^2+3x+1)^{-1}$ என்பதை $A(2x+1)^{-1}+B(x+1)^{-1}$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தலால், $(2x^2+3x+1)^{-1}$ என்பதன் n ஆம் பெறுதிக்கு ஒரு கோவையைப் பெறுக.

அத்தியாயம் 3

வகையீட்டுக் குணகக் குறி

$f(x)$ என்பது $x=a$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதாகுக.

ஆயின், $h\to 0$ ஆக, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\to f'(a)$.

ஆகவே, $f'(a)>0$ எனின், எல்லா h இனுடைய போதுமானளவு சிறிய எண் பெறுமானங்களுக்கும் $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ என்பது நேராகும் ;

அதாவது, $-k, k$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் h இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$ ஆகுமாறு ஒரு நேரெண் k யைக் காணல் கூடும்.

$\therefore\ -k<h<k$ எனின்,

$h>0$ ஆகும் பொழுது $f(a+h)-f(a)>0$,

$h<0$ ஆகும் பொழுது $f(a+h)-f(a)<0$.

அதாவது, x என்பது a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து யாதுமொரு மிகச் சிறிய கணியத்தால் உண்மையாகக் கூடினால், $f(x)$ என்பதும் $f(a)$ என்பதிலிருந்து உண்மையாகக்கூடும் ; x என்பது a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு மிகச் சிறிய கணியத்தாற் குறைந்தால், $f(x)$ என்பதும் $f(a)$ என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து அவ்வாறு குறையும்.

இனி, $b>a$ ஆயிருக்க, a, b என்பனவற்றிற்கிடையே (இரண்டும் உட்பட) x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f'(x)>0$ எனக் கொள்க. ஆயின், x என்பது இவ்வீச்சிற்குள் யாதுமொரு பெறுமானத்திற் கூடாக உண்மையாகக்கூட, $f(x)$ என்பதும் உறுதியாகக் கூடும். ஆகவே, x என்பது a யிலிருந்து b யிற்குக்கூட $f(a)$ என்பதும் $f(x)$ இலிருந்து $f(b)$ யிற்கு உறுதியாகக் கூடும்.

$f'(x)$ என்பது (a, b) யில் x இனுடைய பெறுமானங்களின் ஒரு குறிக்கப்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாயிருக்கும்பொழுதும் x இனுடைய மற்றைப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் நேராயிருக்கும்பொழுதும் இம்முடிபு உண்மையாகுமென்பது $f(x)$ இனது தொடர்ச்சியிலிருந்து எளிதிற் காணப்படும்.

a, b என்பனவற்றிற்கிடையில் $x=c$ என்னும் ஒரு புள்ளியில் $f'(x)=0$ என்றும், ஏனைய இடங்களில் $f'(x)$ என்பது நேரென்றுங் கொள்க. ஆயின், x என்பது a யிலிருந்து c யிலுங் குறைந்த

யாதுமொரு பெறுமானத்திற்குக்கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக்கூடும். $f(x)$ என்பது $x=c$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதாயிருத்தலால், x என்பது a யிலிருந்து c யிற்குக்கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடுமென்பது பெறப்படும். மறுபடியும், x என்பது c யிலும் பெரிதான யாதுமொரு பெறுமானத்திலிருந்து b யிற்குக்கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடும். ஆகவே, c யிலுள்ள தொடர்ச்சியால், x என்பது c யிலிருந்து b யிற்குக்கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக்கூடும். ஆகவே, x என்பது a யிலிருந்து b யிற்குக்கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடும். $f'(x)$ என்பதற்கு $x=c$ என்பதில் இருப்பு இல்லாதபோதிலும் $f(x)$ என்பது $x=c$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனின், இந்நியாயம் பொருந்தும்.

a, b என்பனவற்றிற்கிடையில் ஒரு குறிக்கப்பட்ட தொகையான புள்ளிகளில் $f(x)=0$ எனின், ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் அதே நியாயம் பொருந்தும்.

$a\leq x\leq b$ ஆக எல்லா x இற்கும் $f'(x)\geq 0$ ஆக, (a, b) யில் ஒரு முடிவுள்ள தொகையான புள்ளிகளிலேயே $f'(x)$ என்பது பூச்சியமாயிருந்தால், x ஆனது a யிலிருந்து b யிற்குக்கூட $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடும்.

இனி, $f'(a)<0$ எனக் கொள்க.

ஆயின், h இனுடைய போதுமானளவு சிறிய எண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ என்பது மறையாகும்.

அதாவது, $-k, k$ என்பனவற்றிற்கிடையில் எல்லா h இற்கும் $f(a+h)-f(a)$, h என்பனவற்றிற்கு முரண்குறிகள் இருக்குமாறு ஒரு நேரெண் k என்பதைக் காணல் கூடும்.

$\therefore\ -k<h<k$ எனின்,

$h>0$ ஆகும்பொழுது $f(a+h)-f(a)<0$,

$h<0$ ஆகும்பொழுது $f(a+h)-f(a)>0$.

ஆகவே, x ஆனது a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து யாதுமொரு மிகச் சிறிய கணியத்தாற் கூட, $f(x)$ ஆனது $f(a)$ என்பதிலிருந்து குறையும்; x ஆனது a யிலிருந்து ஒரு மிகச் சிறிய கணியத்தாற் குறைய, $f(x)$ ஆனது $f(a)$ இலிருந்து கூடும்.

$a\leqq x\leqq b$ ஆக எல்லா x இற்கும் $f'(x)\leqq 0$ ஆக, (a, b) யில் ஒரு முடிவுள்ள ஒரு தொகையான புள்ளிகளிலேயே $f'(x)$ என்பது பூச்சியமாயிருந்தால், x ஆனது a யிலிருந்து b யிற்குக்கூட $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறையுமென்பது முன்போல அதே நியாயத்தாற் பெறப்படும்.

(உ-ம்) 1. எல்லா $x>1$ ஆக, $\dfrac{x}{1+x^2}<\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2} \text{ ஆகுக.}$$

எல்லா $x>1$ ஆக, $f'(x)=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0$.

k என்பது 1 இலும் பெரிதான யாதுமோர் எண்ணுயின்,

$1\leqq x\leqq k$ என்பதில் $f'(x)\leqq 0$; ஆனல், $x=1$ ஆகும் பொழுதே $f'(x)=0$.

ஆகவே, x ஆனது 1 இலிருந்து k யிற்கு அதிகரிக்க, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறையும்.

$$f(1)=\frac{1}{2}. \qquad \therefore\ f(k)<\frac{1}{2}.$$

அதாவது எல்லா $x>1$ ஆக, $f(x)<\frac{1}{2}$.

உ-ம் 2. $x>0$ ஆக, x ஆனது ஆரையனிலுள்ள கோணமாயின்,

கோசை $x>1-\dfrac{x^2}{2}$ என்றும், சைன் $x>x-\dfrac{x^3}{6}$ என்றுங் காட்டுக.

$$f(x)=\text{கோசை } x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right) \text{ என எடுக்க.}$$

எல்லா x இற்கும் $f'(x)=-$சைன் $x+x>0$.

$\therefore$ k என்பது யாதுமொரு நேரெண்ணுயின்,

$0\leqq x\leqq k$ என்பதில் $f'(x)\leqq 0$. ஆனல் $x=0$ ஆகும் பொழுதே $f'(x)=0$.

$\therefore$ x ஆனது 0 இலிருந்து k யிற்குக்கூடும்போது, $f(x)$ என்பது உறுதியாக அதிகரிக்கும்.

$$f(0)=0.$$

$\therefore$ $k>0$ ஆகும் பொழுது $f(k)>0$.

$\therefore$ $x>0$ ஆகும் பொழுது கோசை $x>1-\dfrac{x^2}{2}$.

இனி, $\phi(x)=$ சைன்$x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ ஆகுக.

எல்லா $x>0$ ஆக $\phi'(x)=$ கோசை $x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)>0$.

$\therefore$ x ஆனது 0 இலிருந்துகூட, $\phi(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடும்.

$$\phi(0)=0.$$

$\therefore$ $x>0$ ஆகும்பொழுது, $\phi(x)>0$.

அதாவது $x>0$ ஆகும்பொழுது சைன் $x>x-\dfrac{x^3}{6}$.

மாற்ற வீதமாகக் கொள்ளப்படும் வகையீட்டுக் குணகம்.

$f(t)$ என்பது t என்னும் மாறியின் ஒரு சார்பாகுக.

t ஆனது a யிலிருந்து $a+h$ என்பதற்கு h என்னும் ஒரு நேர்க் கணியத்தாற் கூட, அச்சார்பின் ஏற்றம் $f(a+h)-f(a)$ ஆகும்; இது நேராய் அல்லது மறையாய் இருக்கலாம்.

a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து t ஆனது ஒவ்வோர் அலகாற் கூடுதலுற, அச்சார்பின் சராசரி ஏற்றம் $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. ஆகும்.

$f(t)$ என்பது $t=a$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதாயின், $f'(a)$ என்பது a என்னும் பெறுமானத்திலிருந்து t ஒவ்வொரு அலகாற் கூடுதலுற $f(t)$ கூடும் வீதத்தைக் குறிக்கும்; இங்கு, குறைதலை மறைக் கூடுதலாகக் கொள்ளும் வழக்கம் மேற்கொள்ளப்படும்.

$f'(t)$ என்பது "t" என்னும் பொதுப் பெறுமானத்திலிருந்து t யின் ஒவ்வோர் அலகுக் கூடுதலுக்கும் $f(t)$ யின் கூடுதல் வீதத்தைக் குறிக்கும். இக்கூடுதல் வீதம் t யின் ஒரு சார்பாய், எல்லா t யிற்கும் $f'(t)$ என்பது மாறுதிருக்குஞ் சிறப்பு வகையிலன்றி, t யோடு மாறும்; A, B என்பன மாறிலிகளாயிருக்க, $At+B$ என்னும் வடிவத்தில் t யின் ஒரு படிச் சார்பாய் $f(t)$ இருக்கும்போது இது நிகழும்.

OX என்னும் நேர்கோட்டின் வழியே இயங்கும் ஒரு துணிக்கையை ஆராய்க. S என்பது t என்னும் நேரத்தில், O விலிருந்து அத்துணிக்கையினது தூரமாயின், S என்பது t யின் ஒரு சார்பாகும். $S=f(t)$ ஆகுக. h என்பது ஒரு சிறு நேர்க்கணியமாக, $t+h$ என்னும் நேரத்தில் O விலிருந்து அத்துணிக்கையினது தூரம் $f(t+h)$. அத்துணிக்கை h என்னுஞ் சிற்றிடை நேரத்திற் சென்ற தூரம்

$f(t+h)-f(t)$; அத்துணிக்கையின் இயக்கத்திசை இச்சிற்றிடைநேரத்தில் OX அல்லது XO வழியே ஏற்ப, $f(t+h)-f(t)$ என்பது நேர் அல்லது மறையாகும். இந்நேரத்தில் அத்துணிக்கையின் சராசரி வேகம் $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ஆகும்; $h\to 0$ ஆக, இக்கோவையின் எல்லை t என்னும் நேரத்தில் அத்துணிக்கையின் வேகத்தைத் தரும்.

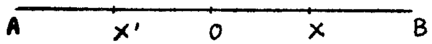
ஆகவே, t என்னும் நேரத்தில் அத்துணிக்கையின் வேகம் $f'(t)$.

$f'(t)>0$ எனின், t என்னும் கணத்தில் அத்துணிக்கையின் இயக்கத் திசை OX வழியே இருக்கும்.

$f'(t)<0$ எனின், இயக்கத்திசை XO வழியே இருக்கும்.

$f'(t)=0$ எனின், t என்னும் நேரத்திற் கணப்பொழுதிற்கு நிலையாக இருக்கும்.

(உ-ம்) 1. AOB என்னும் ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே ஒரு துணிக்கை t என்னும் நேரத்தில் OB என்னுந் திசையில் O என்னும் நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரம் 2 சைன் t ஆகுமாறு இயங்குகின்றது. அத்துணிக்கையின் இயக்கத்தை ஆராய்ந்து கூறுக.



சைன் t இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் 1 ஆயும் மிகச்சிறிய பெறுமானம் -1 ஆயுமிருத்தலால், X என்பது OB வழியே O விலிருந்து 2 அலகுத் தூரத்திலும், X' என்பது OA வழியே O விலிருந்து 2 அலகுத் தூரத்திலும் உள்ள $X'OX$ என்னுங் கோட்டின் பகுதிக்குள் அத்துணிக்கையின் பாதை அடங்கும். OB என்னுந் திசையில் O விலிருந்து அத்துணிக்கையினது தூரம் 2 சைன் t ஆகும்.

ஆகவே, OB என்னுந் திசையில் t என்னும் நேரத்தில் அத்துணிக்கையின் வேகம் $\frac{d}{dt}(2\text{ சைன் }t)=2$ கோசை t.

$0<t<\frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, கோசை t என்பது நேராய் t என்பது கூடுதலுற உறுதியாகக் குறைதலுறும்.

$t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள நேரத்தில், அத்துணிக்கை O விலிருந்து X இற்கு உறுதியாகக் குறையும் வேகத்தோடு இயங்கும். X என்னும் புள்ளியில், $t=\frac{\pi}{2}$; அத்துணிக்கையின் வேகம் பூச்சியமாகும்; அது கணநிலைக்கு ஓய்வில் இருக்கும்.

$t>\frac{\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, வேகம் மறையாகும்; ஆகவே, அத்துணிக்கை கணநிலையாக X இல் ஓய்வில் இருந்ததன்பின், XO என்னுந் திசையில் இயங்கத் தொடங்கும். $t=\pi$ ஆகும்பொழுது அது மறுபடியும் O வை அடையும். $t>\pi$ ஆகும்பொழுது, 2 சைன் t என்பது மறையாகும்; ஆயின், அத்துணிக்கை OX' வழியே இயங்கும். $t=\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது, வேகம் மறுபடியும் பூச்சியமாகும்; ஆகவே, அத்துணிக்கை X' இல் ஓய்வில் இருக்கும். $t>\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்பொழுது 2 கோசை t என்பது நேராகும்; ஆக, அத்துணிக்கை $X'O$ வழியே இயங்கி $t=2\pi$ ஆகும்பொழுது O வை அடையும்.

$t = 0$, $t = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள இயக்கம் $t = 2\pi$, $t = 4\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் அதன்பின் $t = 4\pi$, $t = 6\pi$ என்பன வற்றிற்கு இடையிலும் மறுபடியுஞ் செய்யப்படும். இவ்வாறே பிறவற்றிற்கு இடையிலுஞ் செய்யப்படும்.

(உ-ம்) 2. $\frac{\pi}{4}$ என்னும் அரையுச்சிக் கோணமுள்ள நேர்வட்டக்கூம்பு வடிவமான ஒரு பெரிய பாத்திரமானது தன்னுச்சி கீழ்முகமாகவும் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க, அதற்குள்ளே செக்கனுக்கு 10 கன சதமமீற்றர் என்னும் வேகத்திலே நீர் ஊற்றப்படுகின்றது. அதற்குள்ளே உள்ள நீரின் உயரம் 5 ச மீ. ஆகும் கணத்தில், அந்நீர் செக்கனுக்கு எவ்வளவு உயரங் கூடுகின்றதெனக் காண்க.

h ச மீ. என்பது t செக்கனின் அப்பாத்திரத்திலுள்ள நீரின் உயரமாகுக. ஆயின் நேரம் t யில் அப்பாத்திரத்திலுள்ள நீரின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi h^2.h$ அல்லது $\frac{1}{3}\pi h^3$ கன சமீ.

ஆகவே அக்கனவளவு செக்கனுக்குக் கூடும் வீதம்

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{3}\pi h^3\right) = \frac{d}{dh}\left(\tfrac{1}{3}\pi h^3\right) \times \frac{dh}{dt}$$

$$= \pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

ஆனால் இவ்வீதம் எல்லா t இற்கும் சமனாகிச் செக்கனுக்கு 10 கன சமீ. ஆகும்.

$$\pi h^2 \frac{dh}{dt} = 10$$

$\therefore$ எல்லா t யிற்கும் $\frac{dh}{dt} = \frac{10}{\pi h^2}$

ஆனால், $\frac{dh}{dt}$ என்பது செக்கனுக்கு h கூடும் வீதமாகும்.

ஆகவே, $h=5$ ஆகுங் கணத்தில், h கூடும் விகிதம்

செக்கனுக்கு $\frac{10}{\pi . 5^2}$ அல்லது $\frac{2}{5\pi}$ ச.மீ.

பயிற்சி 20

1. $x>0$ ஆகும்பொழுது $1-\frac{x^2}{2} <$ கோசை $x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ எனக் காட்டுக ; $x < 0$ ஆகும் பொழுதும் அச்சமனிலிகளே உண்மையாகுமென்றுங் காட்டுக.

2. $x>0$ ஆகும்பொழுது $x-\frac{x^3}{3} <$ தான்$^{-1}x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ எனக் காட்டுக.

3. x ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து கூட $\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}$ என்பது உறுதியாகக் கூடும் எனக் காட்டுக.

4. $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ என்பது 0 விலிருந்து $\frac{1}{\sqrt{3}}$ இற்கு x கூட உறுதியாகக் கூடுமென்றும் அதன்பின் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ இலிருந்து x கூட அது உறுதியாகக் குறையுமென்றுங் காட்டுக. x இனுடைய மெய்ப்பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அச்சார்பின் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

5. $x>1$ ஆகும்பொழுது, $\frac{(x+1)^3}{x-1}$ இன் மிகச்சிறிய பெறுமானம் 27 எனக் காட்டுக.

6. $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x+1}$ என்பது -1 இலும் மட்டாகப் பெரிதான யாதுமொரு பெறுமானத்திலிருந்து பூச்சியத்திற்கு x கூட உறுதியாகக் குறையும் என்றும் அதன்பின் 0 இலிருந்து 2 இற்கு x கூட அது உறுதியாகக் கூடுமென்றும், இறுதியாக 2 இலிருந்து x கூட, அது உறுதியாகக் குறையுமென்றுங் காட்டுக.

7. t என்பது 0, $\frac{2\pi}{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும், $\frac{4\pi}{3}$, 2π என்பனவற்றிற்கும் இடையிலுங் கூட, $\frac{\text{சைன்}\ t}{1 + 2\ \text{கோசை}\ t}$ என்பது உறுதியாகக் கூடும் எனக் காட்டுக.

8. r என்பது தந்த நேர் மாறிலியாகவிருக்க, pv^r என்பது மாறாதிருக்குமாறு ஒரு வாயுவினுடைய அமுக்கம் p யும் கனவளவு v யும் மாறுகின்றன. v ஒவ்வோர் அலகாற் கூட p என்பது குறையும் விகிதம் $\frac{rp}{v}$ எனக் காட்டுக.

9. ஒரு துணிக்கையானது O என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டபின் t செக்கனில் O விலிருந்து அதனுடைய தூரம் $\frac{t}{\sqrt{(1+t^4)}}$ அடியாகுமாறு O விலிருந்து ஒரு நேர்கோட்டிலே செலுத்தப்படுகின்றது. அத்துணிக்கை ஒரு செக்கனுக்கு மாத்திரம் O விலிருந்து அதன் மறைமுகமாக இயங்குமென்றும் ஒரு செக்கனுக்குப்பின் O வின் முகமாக அது இயங்குமென்றுங் காட்டுக. அது O வின் முகமாக இயங்கும்போது, அது அடையும் மிகப் பெரிய வேகஞ் செக்கனுக்கு $2/3\sqrt{6}$ அடி என்றுங் காட்டுக.

10. ஒரு பலூனானது தன் வடிவம் என்றுங் கோளவடிவாயிருக்குமாறும் தனக்குள்ளேயுள்ள கனவளவு ஒரு மாறுத வீதத்தோடு கூடுமாறும் விரிகின்றது. அவ்வாயுக் கூண்டின் பரப்பின் பரப்பளவு கூடுகின்ற வீதம் அதன் ஆரைக்கு நேர்மாறு விகிதசமமாகுமெனக் காட்டுக. அக்கனவளவு கூடுதலின் மாறுவீதஞ்செக்கனுக்கு 2 கன ச மீ. ஆயின் அவ்வாயுக் கூண்டின் ஆரை 4 ச மீ. ஆயிருக்கும்பொழுது, அப்பரப்பின் பரப்பளவு கூடும் வீதஞ் செக்கனுக்கு 1 சது. சமீ. எனக் காட்டுக.

உயர்வுப் பெறுமானமும் இழிவுப் பெறுமானமும்.

$f(x)$ ஆனது x இன் ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பாகுக. $a-\delta$, $a+\delta$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் a அல்லாத x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f(x)<f(a)$ ஆகுமாறு, δ என்னும் ஒரு நேர் கணியத்தைக் காண்போமாயின், $f(x)$ ஆனது, $x=a$ என்பதில் உயர்வுப் பெறுமானத்தை அடையும் எனப்படும். அல்லது a என்னும் பெறுமானத்தை உள்ளடக்கிய x இனுடைய பெறுமானங்களின் ஓர் இடையை அவ்விடைக்குள்ளேயுள்ள x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $x=a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது தன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தை அடையுமாறு காண்போமாயின், $f(x)$ ஆனது $x=a$ என்பதில் **உயர்வுப்** பெறுமானம் உள்ளது.

$a-\delta$, $a+\delta$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் a அல்லாத x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f(x)>f(a)$ ஆகுமாறு, δ என்பதைக் காண்போமாயின், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது **இழிவுப்** பெறுமானத்தை அடையுமெனப்படும்.

அல்லது, a என்னும் பெறுமானத்தை உள்ளடக்கிய x இனுடைய பெறுமானங்களின் ஓர் ஆயிடையை f அவ்வாயிடைக்குள்ளேயுள்ள x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $x=a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது தன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தை அடையுமாறு காண்போமாயின், $f(x)$ ஆனது $x=a$ என்பதில் இழிவுப் பெறுமானம் உள்ளது.

உயர்வு, இழிவு என்பனவற்றைப் பற்றிய இவ்வரைவிலக்கணங்களால், ஒரு சார்பிற்கு ஒன்றின் மேற்பட்ட உயர்வும் ஒன்றின் மேற்பட்ட இழிவும் இருக்கலாமென்பது தெளிவு. அதற்கு உயர்வோ இழிவோ எங்காயினும் இல்லாதும் விடலாம். உதாரணமாக, x என்பது மெய்ப்பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்குமூடாகக் கூட, உறுதியாகக் கூடும் ஒரு சார்பிற்கு உயர்வோ, இழிவோ இல்லை.

$f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வு இருந்தால், x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $x=a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது தன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை அடையுமென்பது பெறப்படாது. $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் இழிவு இருந்தால், x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $x=a$ என்பதில், $f(x)$ ஆனது தன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தை அடையுமென்பது பெறப்படாது. $f(x)$ இன் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானம் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வரைவுபடுத்தப்பட்ட ஒரு வீச்சிற்குள்ளே மாத்திரமுள்ள $f(x)$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம்; $f(x)$ இன் ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வரைவுபடுத்தப்பட்ட ஓர் வீச்சிற்குள்ளே மாத்திரமுள்ள $f(x)$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம்.

$f'(a)$ என்பது உண்டெனின், $x=a$ என்பதில் உயர்வோ இழிவோ இருத்தற்குத் தேவையான நிபந்தனை $f'(a)=0$ என்பதே.

அதாவது, $f'(a)$ என்பதற்கு இருப்பு இருக்க, $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வோ, இழிவோ இருந்தால், $f'(a)=0$.

$f'(a)>0$ எனக் கொள்க.

ஆயின், h இன் எண் பெறுமானம் போதிய சிறு நேர்க்கணியம் ஒன்றிலுஞ் சிறியதாயிருக்கும்போது,

$$h>0 \text{ எனின், } f(a+h)>f(a),$$
$$h<0 \text{ எனின், } f(a+h)<f(a).$$

$f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வு இருந்தால், முதலாம் சமனிலி உண்மையாகாது; $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் இழிவு இருந்தால், இரண்டாஞ் சமனிலி உண்மையாகாது.

ஆகவே, $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வோ இழிவோ உண்டெனின், $f'(a)$ என்பது நேராகாது. அதுபோல, அது மறையாகாது. ஆகவே, அதற்கு இருப்பு உண்டெனின், அது பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

$f'(a)$ என்பதற்கு இருப்பு இருந்தாற்றான் அது பூச்சியமாகும் என்பதை நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும். $f'(a)$ என்பதற்கு இருப்பு இல்லாத போதிலும் $x=a$ என்பதில் $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் உயர்வோ, இழிவோ இருக்கலாம். உதாரணமாக, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{1}{3}})^2$ என்பதை எடுக்க.

$$x\neq 0 \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x)>0,\ f(0)=0.$$

ஆகவே, $-\delta$, δ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இனுடைய பெறுமானங்களின் யாதுமொரு வீச்சில், $f(x)$ என்பதற்கு $x=0$ என்பதிலே மிகச் சிறிய பெறுமானம் உண்டு. ஆகவே, $x=0$ என்பதில் $f(x)$ என்பது இழிவு; ஆனல், $x^{\frac{2}{3}}$ ஆனது $x=0$ என்பதில் வகையிடத்தகாதது என இதற்கு முன் கண்டுள்ளோம். $f(x)$ என்பது—$x^{\frac{2}{3}}$ என எடுக்கப்பட்டால், $f'(0)$ என்பதற்கு இருப்பு இல்லையெனினும், $f(x)$ என்பதற்கு $x=0$ என்பதில் ஓர் உயர்வு உண்டு. எனின், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் உயர்வோ, இழிவோ இருத்தற்குத் தேவையான நிபந்தனை $f'(a)=0$ என்னுங் கூற்று உண்மையன்று. $f'(a)$ என்பதற்கு இருப்பு இருந்தாற்றான் அது உண்மையாகும்.

இனி, $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வோ, இழிவோ இருத்தற்கு இந் நிபந்தனை போதியதன்று. அதாவது, $f'(a)=0$ எனின், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் உயர்வோ, இழிவோ உண்டு என்பது பெறப்படாது.

உதாரணமாக, $f(x)=(x-a)^3$ என்பதை எடுக்க.

$$x=a \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x)=0.$$
$$x<a \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x)<0.$$
$$x>a \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x)>0.$$

ஆகவே, $x=a$ என்பதில் $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் உயர்வோ, இழிவோ இல்லை.

ஆனல், $x=a$ ஆகும்பொழுது $f'(x)=3(x-a)^2=0$.

$\therefore f'(a)=0$ எனின், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் உயர்வோ, இழிவாதல் உண்டென்று கூறல் இயலாது.

உயர்விழிவுகள் இருத்தற்குப் போதிய நிபந்தனைகள்.

$f'(x)$ இற்கு ஒரு புள்ளியில் இருப்பு இல்லாதபோதிலும் $f(x)$ இற்கு அப்புள்ளியில் ஓர் உயர்வோ இழிவோ இருக்கலாமென்று கண்டுள்ளோம். இப்போது, a யிற்கு அண்மையிலுள்ள x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $f'(x)$ இனது நடத்தையில், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ ஆனது அடையும் ஓர் உயர்வுக்கோ இழிவுக்கோ போதிய நிபந்தனைகளைக் கொடுப்போம்.

$f(x)$ ஆனது $x=a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதாக,
$a-\delta<x<a$ என்பதில் $f'(x)>0$ ஆகவும்,
$a<x<a+\delta$ என்பதில் $f'(x)>0$ ஆகவும்,

இருக்குமாறு δ என்னும் ஒரு நேர்க் கணியத்தைக்காண முடியுமாயின், $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வு உண்டு.

x ஆனது $(a-\delta,\ a)$ என்னும் வீச்சிற் கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடிப் பின்னர் x ஆனது $(a,\ a+\delta)$ என்னும் வீச்சிற் கூட, அது உறுதியாகக் குறையும் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

எனவே, $a-\delta$, $a+\delta$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானம் $x=a$ என்பதிற் பெறப்படும்.

$f(x)$ ஆனது $x=a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதாக,
$a-\delta<x<a$ என்பதில் $f'(x)<0$ ஆகவும்,
$a<x<a+\delta$ என்பதில் $f'(x)>0$ ஆகவும்,

இருக்குமாறு 0 விலும் பெரிதாய் δ ஐக் காண முடியுமாயின், $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் இழிவு உண்டு.

x ஆனது $(a-\delta,\ a)$ என்பதிற் கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறைந்து, பின்னர் x ஆனது $(a,\ a+\delta)$ என்பதிற் கூட, அது உறுதியாகக் கூடும் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

எனவே, $a-\delta$, $a+\delta$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம் $x=a$ என்பதிற் பெறப்படும்.

$f'(x)$ இற்கு $a-\delta<x<a$ என்பதிலும் $a<x<a+\delta$ என்பதிலும் ஒரே குறியிருக்க, $f(x)$ என்பது $x=a$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனின், $f(x)$ இற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வோ இழிவோ இல்லை.

$x=a$ என்பதற்கு அண்மையில் $f'(x)$ இன் மாறுக் குறி நேராய் அல்லது மறையாய் இருத்தற்கேற்ப, $a-\delta<x<a+\delta$ என்பதில் x ஆனது கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாய்க் கூடும் அல்லது குறையும் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

வகையிடத்தக்க சார்பின் கண நிலைப் பெறுமானம்.

$f'(a)=0$ எனின், $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஒரு கண நிலைப் பெறுமானம் உண்டு எனப்படும்.

ஒரு கண நிலைப் பெறுமானம் உயர்வாயிருக்கலாம் அன்றி இழிவாயிருக்கலாம், அன்றி உயர்வாயோ இழிவாயோ இன்றியுமிருக்கலாம்.

உ-ம் 1. $(x-1)^5\ (x-2)^6$ என்பதனுடைய உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அதனுடைய போக்கைத் தொடர்ந்து காண்க.

$f(x)=(x-1)^5\,(x-2)^6$ ஆகுக.

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= 5(x-1)^4(x-2)^6+6(x-1)^5(x-2)^5\\ &= (x-1)^4(x-2)^5(11x-16)\\ &= 11(x-1)^4(x-2)^5\left(x-\frac{16}{11}\right)\\ &= 0, \qquad x=1 \text{ அல்லது } 2 \text{ அல்லது } \frac{16}{11} \text{ ஆகும்பொழுது,}\end{aligned}$$

$$f'(x)=11(x-1)^4(x-2)^4(x-2)\left(x-\frac{16}{11}\right)$$

ஆகவே, $f'(x)\neq 0$ ஆகும்பொழுது, அதன் குறி $(x-2)\left(x-\frac{16}{11}\right)$ என்பதன் குறியோடு ஒன்றுகும்.

$\therefore \frac{16}{11}<x<2$ என்பதில், $f'(x)<0$

1, 2, $\frac{16}{11}$ என்பனவற்றிற்குச் சமனுகாத x இனுடைய மற்றைப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f'(x)>0$

$\therefore\ x<1$ ஆகும்பொழுது, $f'(x)>0$

$1<x<\frac{16}{11}$ ஆகும்பொழுது, $f'(x)>0$,

$\frac{16}{11}<x<2$ ஆகும்பொழுது, $f'(x)>0$,

$x>2$ ஆகும்பொழுது, $f'(x)>0$.

$\therefore$ $x=1$ ஆகும்பொழுது $f(x)$ என்பது ஓர் உயர்வாகவோ ஓர் இழிவாகவோ இராது.

$x=\dfrac{16}{11}$ ஆகும்பொழுது, $f(x)$ என்பது உயர்வாகும்.

$x=2$ ஆகும்பொழுது, $f(x)$ என்பது இழிவாகும்.

x ஆனது யாதுமொரு மறைப்பெறுமானத்திலிருந்து $\dfrac{16}{11}$ இற்குக்கூட,

$f(x)$ ஆனது உறுதியாகக் கூடும்; x ஆனது $\dfrac{16}{11}$ இலிருந்து 2 இற்குக் கூட,

$f(x)$ ஆனது உறுதியாகக் குறையும்; x ஆனது 2 இலிருந்துகூட, $f(x)$ ஆனது உறுதியாகக் கூடும்.

x ஆனது பூச்சியமல்லாததாயிருக்கும்போது $f(x)=x^{11}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^6$

x இன் எண்பெறுமானம் மிகப் பெரிதாயிருக்கும்போது, $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^6$ ஆனது 1 இற்கு மிக்க அண்ணளவாகச் சமனாகும்.

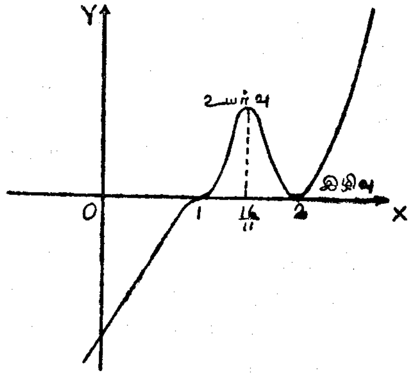
$\therefore$ $x\to\infty$ ஆக, $f(x)\to\infty$;

$x\to-\infty$ ஆக, $f(x)\to-\infty$.

$f(1)=0=f(2)$, $f(0)=-2$

பின்னர் $y=f(x)$ இன் வரைபின் வடிவு பெறப்படுகின்றது;

அவ்வளையிக்கு, ஒன்று முதலாங் காலியிலும் மற்றையது மூன்றாங் காலியிலுமாக இரண்டு முடிவில் கிளைகள் உண்டு. $f'(x)$ ஆனது "x" என்னும் புள்ளியிலுள்ள அவ்வளையியின் சரிவைத் தருகின்றமையால், $x=1, \dfrac{16}{11}$, 2 என்பனவற்றிலுள்ள அவ்வளையியினுடைய தொடலிகள் எல்லாம் x அச்சிற்குச் சமாந்தரம். $x=1$, 2 என்பனவற்றில் x அச்சே தொடலியாகும். $x=1$ என்பதில், அவ்வளையிக்கு விசேடமான ஓர் உடைமையுண்டு. அது தொடுபுள்ளியிலே தொடலியைக் குறுக்காகக் கடந்து தொடலியின், ஒரு பக்கத்திலிருந்து மற்றைப் பக்கத்திற்குச் செல்லும். ஒரு வளையியின் மீதுள்ள அத்தகைய புள்ளி அவ் வளையியின் மீதுள்ள **விபத்திப்புள்ளி** எனப்படும்.



உ-ம். 2. x இனுடைய மெய்ப்பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x}$ என்னுஞ் சார்பினது போக்கைத் தொடர்ந்து காண்க.

$f(x)=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x}$ ஆகுக.

$x=-1$ ஆகும்பொழுது $f(x)$ என்பதற்கு இருப்பில்லை. x இனுடைய மற்றைப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அது தொடர்ச்சியுள்ளது;

ஆனால், அது $x=0$ என்பதில் வகையிடத்தக்கதன்று.

x இனுடைய மற்றைப் பெறுமானங்களுக்கு $f'(x)$ உளதாகும்.

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{1+x}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^2}=\frac{2(1+x)-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(1+x)^2}=\frac{2-x}{3x^{\frac{1}{3}}(1+x)^2}$$

$f'(x)$ இன் குறி $\dfrac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}}$ அல்லது $\dfrac{(2-x)x}{(x^{\frac{1}{3}})^4}$ என்பதன் குறியோடு ஒன்றாகும்.

$\therefore$ $0<x<2$ என்பதில், $f'(x)>0$

0, -1 என்பனவற்றைத் தவிர, x இனுடைய பிறபெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f'(x)<0$.

அதாவது $x<-1$ எனின், $f'(x)<0$,

$-1<x<0$ எனின், $f'(x)<0$,

$0<x<2$ எனின், $f'(x)>0$,

$x>2$ எனின், $f'(x)<0$.

$\therefore$ $f(x)$ என்பதற்கு $x=0$ என்பதில் ஓர் இழிவும் $x=2$ என்பதில் ஓர் உயர்வும் இருக்கும்.

$\therefore$ x ஆனது, -1 இலுஞ் சிறிய மறைப்பெறுமானங்களுக்கூடாகக் கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறையும்.

$x\to-1$ ஆக, $|f(x)|\to\infty$.

$\therefore$ $x\to-1-0$ ஆக, $f(x)\to-\infty$.

x ஆனது -1, 0 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கூட,

$f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறையும்.

$\therefore$ $x\to-1+0$ ஆக, $f(x)\to\infty$. x ஆனது 0 இலிருந்து 2 இற்குக் கூட $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் கூடும். x ஆனது 2 இற்கு அப்பாற் கூட, $f(x)$ என்பது உறுதியாகக் குறையும்.

$x \neq 0$ ஆகும்பொழுது, $|x| \to \infty$ ஆக,

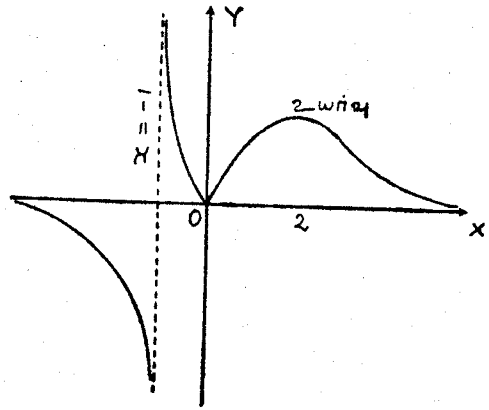
அதாவது $x \to \infty$ ஆக,

அல்லது $x \to -\infty$ ஆக,

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1} \to 0.$$

பின்னர் $y = f(x)$ என்னும் வரைபின் வடிவு பெறப்படுகின்றது.

அவ்வளையிக்கு $x = 2$ என்பதில் x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான தொடலி உண்டு.



$x \to -0$ ஆக, $f'(x) \to -\infty$,
$x \to +0$ ஆக, $f'(x) \to \infty$.

ஆகவே, ஒவ்வொரு கிளையும் உற்பத்தியில் y அச்சைத் தொடுகின்ற இரு கிளைகள் அவ்வளையிக்கு உண்டு. -1 இலும் பெரிய x இன் பெறுமானங்களுக்கு, $f(x)$ என்பதற்கு $x = 2$ என்பதில் ஓர் உயர்வு இருந்தபோதிலும், அதற்கு மிகப்பெரிய பெறுமானம் இல்லை. 0 இலும் பெரிய x இன் பெறுமானங்களுக்கு $x = 2$ ஆகும்பொழுது மிகப்பெரிய பெறுமானம் பெறப்படும்.

உ-ம். 3. 0, 2π என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $\frac{\text{சைன் } x}{2+\text{கோசை } x}$ இனது போக்கைத் தொடர்ந்து காண்க.

$f(x) = \frac{\text{சைன் } x}{2+\text{கோசை } x}$ என்பது எப்போதும் உண்டு; அது x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் வகையிடப்படத்தக்கது.

$$f'(x) = \frac{\text{கோசை } x\,(2+\text{கோசை } x) - \text{சைன் } x\,(-\text{சைன் } x)}{(2+\text{கோசை } x)^2}.$$

$$= \frac{1+2\,\text{கோசை } x}{(2+\text{கோசை } x)^2}.$$

கோசை $x = -\frac{1}{2}$ ஆகும்பொழுது, அதாவது $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ஆகும்பொழுது, $f'(x) = 0$.

கோசைx என்பது x ஆனது 0 இலிருந்து π இற்குக் கூட, உறுதியாகக் குறைந்து பின்னர் x ஆனது π யிலிருந்து 2π யிற்குக் கூட, உறுதியாகக் கூடும்.

$$\therefore\ 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ என்பதில் } f'(x) > 0;$$

$$\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ என்பதில் } f'(x) < 0;$$

$$\frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ என்பதில் } f'(x) > 0.$$

$\therefore f(x)$ இற்கு $x = \frac{2\pi}{3}$ இல் ஓர் உயர்வும் $x = \frac{4\pi}{3}$ என்பதில் ஓர் இழிவும் உண்டு.

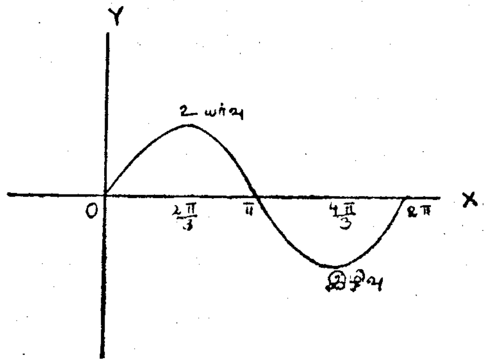
$f(x)$ என்பது x ஆனது 0 இலிருந்து $\frac{2\pi}{3}$ யிற்குக் கூட, உறுதியாகக் கூடிப் பின்னர் x ஆனது $\frac{2\pi}{3}$ யிலிருந்து $\frac{4\pi}{3}$ யிற்குக் கூட, உறுதியாகக் குறைந்து அதன்பின்னர் x ஆனது $\frac{4\pi}{3}$ யிலிருந்து 2π யிற்குக் கூட, உறுதியாகக் கூடும்.

$$f(o) = 0 = f(\pi) = f(2\pi)\,;\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = -f\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

$$x = \pi + \alpha \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x) = -\frac{\text{சைன் } \alpha}{2-\text{கோசை } \alpha}.$$

$$x = \pi - \alpha \text{ ஆகும்பொழுது, } f(x) = \frac{\text{சைன் } \alpha}{2-\text{கோசை } \alpha},$$

ஆகவே, $x = 0$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையே $y = f(x)$ என்னும் வரைபின் பகுதி $x = \pi, x = 2\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பகுதியின் வடிவினதாகும்; ஆனால் அவ்விரு பகுதிகளும் x அச்சினுடைய எதிர்ப்பக்கங்களிற் கிடக்கும்.



பயிற்சி 21.

1. $x^2(x+1)^3$ என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. $x=-1$, $x=1$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் அச்சார்பின் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ என்னுஞ் சார்பிற்கு ஓர் உயர்வும் ஓர் இழிவும் உண்டு எனக் காட்டுக ; x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உயர்வுப் பெறுமானம் அச்சார்பின் மிகப் பெரிய பெறுமானமென்றும் இழிவுப் பெறுமானம் அதன் மிகச் சிறிய பெறுமானமென்றுங் காட்டுக.

3. $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ என்னுஞ் சார்பிற்கு ஓர் உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டென்றும் இழிவுப் பெறுமானம் யாதும் இல்லை யென்றுங் காட்டுக ; அன்றியும், அச்சார்பு $-\dfrac{27}{4}$ இலுங் குறைந்த ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும், x இனுடைய மூன்று வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கும் $-\dfrac{27}{4}$ இலுங் கூடிய ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு மாத்திரமும் எடுக்குமென்றுங் காட்டுக.

4. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{5+x^2}$ என்னுஞ் சார்பு x ஆனது -1 இலிருந்து 1 இற்குக் கூடும்பொழுது கூடி, அதன் பின்னர் வேறு யாதும் வீச்சில் x கூட அது குறையுமென்று காட்டுக. அச்சார்பின் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. அதன் வரைபையும் வரைக.

5. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ என்பதனுடைய போக்கைத் துணிக. அச்சார்பிற்கு ஓர் உயர்வும் ஓர் இழிவும் உண்டென்றும், இழிவுப் பெறுமானம் உயர்வுப் பெறுமானத்திலும் பெரிதென்றுங் காட்டுக. அன்றியும், அச்சார்பானது x இனது ஒரு பெறுமானத்திற்கு மாத்திரம் உயர் விழிவுப் பெறுமானங்களுக்கு இடையேயுள்ள ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்குமென்றும், இழிவுப் பெறுமானத்திலும் பெரிய அல்லது உயர்வுப் பெறுமானத்திலுஞ் சிறிய யாதுமொரு பெறுமானம் அச்சார்பினால் x இனுடைய வேறு வேறான மூன்று பெறுமானங்களுக்கு அடையப்படுமென்றுங் காட்டுக.

6. 0, π என்பனவற்றிற்கு இடையில் x ஆனது கூட சைன் x கோசை$^3 x$ என்பது உறுதியாகக் குறைகின்ற x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அச்சார்பு $-\dfrac{3}{16}\sqrt{3}, \dfrac{3}{16}\sqrt{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

7. கோசை $x\sqrt{}$ (சைன் $2x$) என்பதற்கு $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் ஓர் உயர்வு உண்டென்று காட்டுக ; இவ்வீச்சிற்குள் அச்சார்பினுடைய மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தையுங் காண்க.

8. இருசமபக்க முக்கோணியொன்று தந்த ஒரு வட்டத்திற்கு உள் வரையப்பட்டுள்ளது. அம்முக்கோணி சமபக்க முக்கோணியாகும்பொழுது, அம்முக்கோணியின் சுற்றளவு மிகப் பெரிதாகுமென்றும் அம்முக்கோணியின் பரப்பளவு மிகப் பெரிதாகுமென்றுங் காட்டுக.

9. இருசமபக்க முக்கோணியொன்று r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்திற்குச் சுற்றுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளது. சமபக்கங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் 2θ எனின் $x=$ சைன் θ ஆக, சுற்றளவின் வர்க்கம் $\dfrac{4r^2(1+x)^3}{x^2(1-x)}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அம்முக்கோணி சமபக்க முக்கோணியாகும் பொழுது சுற்றளவு மிகச் சிறிதாகுமெனக் காட்டுக

10. OX, OY, என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள இரண்டு நிலையான கோல்கள். PQ என்பது OY யை வெட்டாது OX இற்குச் சமாந்தரமாய் OY யிலிருந்து தன்முனை P ஓரலகுத் தூரத்திலிருக்குமாறு (XOY என்னுங் கோணத்திலுள்ள) வேறொரு கோல். 8 அலகு நீளமுள்ள AB என்னும் இயங்கத்தக்க ஒரு கோலானது OY யின் மீது முனை A யும், OX, PQ என்பனவற்றிற்கு இடையிலே முனை B யும் இருக்கத் தொடக்கத்தில் APB என்னும் நிலையில் உள்ளது. இது YO வழியே A யானது வழுக்குமாறும் அக்கோலின் யாதுமொரு புள்ளி P யைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறும் இயக்கப்படுகின்றது. PQ, OX ஏன்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள தூரம் $3\sqrt{3}$ இலும் பெரிதாயின், B என்னும் முனை OX என்பதை ஒரு பருவத்திலும் தொடாதெனக் காட்டுக.

11. 8 அடி அகலமான ஒரு தெருவிலிருந்து அதனைச் செங்கோணங்களிற் சந்திக்கும் வேறொரு தெருவிற்கு 27 அடி நீளமான ஒரு சட்டம் கிடைநிலையிற் கொண்டு செல்லப்பட வேண்டியதாயிற்று. இரண்டாந் தெருவின் அகலம் $5\sqrt{5}$ அடியிலுங் கூடினாலன்றி இது முடியாது எனக் காட்டுக.

12. ஒரு நேர்வட்ட உருளை $\dfrac{\pi}{4}$ இலும் பெரிதான θ என்னும் அரையுச்சிக் கோணமுடைய ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பிற்குள்ளே அவ்வுருளையினது தளமுனைகளுள் ஒன்று அக்கூம்பின் அடியைத் தொடுமாறும், மற்றைத் தளமுனையின் பரிதி அக்கூம்பின் வளை பரப்பைத் தொடுமாறும் உள் வரையப்பட்டுள்ளது. அவ்வுருளையின் கனவளவு அக்கூம்பின் கனவளவின் $\dfrac{4}{9}$ ஐ அதிகரிக்காதென்று காட்டுக.

முதலிரு வரிசைகளின் வகையீட்டுக் குணகங்களில் உயர்விழிவுகளுக்குப் போதிய நிபந்தனைகள்.

வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பினுடைய உயர்விழிவுப் பெறுமானங்கள் அச்சார்பின் முதலாம் வகையீட்டுக் குணகத்தின் குறிமாற்றத்தை ஆராய்வதால் எவ்வாறு பெறப்படலாமெனக் கண்டுள்ளோம். x ஆனது a என்னும் ஒரு பெறுமானத்திற்கூடாக $f'(a)=0$ ஆகும்படி செல்ல $f'(x)$ இன் குறிமாற்றம், $f''(a)$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், $f''(a)$ யின் குறியை ஆராய்வதாலே துணியப்படக்கூடும்.

$f'(a)=0$ என்றும் $f''(a)>0$ என்றுங் கொள்க.

$\phi(x)=f'(x)$ எனப் பிரதியிடுக ; ஆயின், $\phi'(x)=f''(x)$,

$\phi(a)=0$, $\phi'(a)>0$.

$\phi'(a)>0$ ஆயிருத்தலால்,

$a-k<x<a$ என்பதில் $\phi(x)<\phi(a)$ ஆகுமாறும்,

$a<x<a+k$ என்பதில் $\phi(x)>\phi(a)$ ஆகுமாறும்,

k என்னும் ஒரு நேரெண்ணைக் காணல் கூடும்.

அதாவது $a-k<x<a$ என்பதில் $f'(x)<0$,

$a<x<a+k$ என்பதில் $f'(x)>0$.

$\therefore$ $f(x)$ என்பதற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் இழிவு உண்டு.

$\therefore$ $f'(a)=0$ ஆயும், $f''(a)>0$ ஆயுமிருந்தால், $f(x)$ இற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் இழிவு உண்டு.

அதுபோல $f'(a)=0$ ஆயும் $f''(a)<0$ ஆயுமிருந்தால் $f(x)$ இற்கு $x=a$ என்பதில் ஓர் உயர்வு உண்டு.

இச்சோதனைகள் அறிமுறை நோக்கத்தையே பற்றியன. செய்முறையில் அவை அவ்வளவு வசதியானவையல்ல. இவை இருமுறை வகையிடுதலைக் கொண்டுள்ளன ; இன்னும், இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகமும் ஆராயப் படும் புள்ளியிற் பூச்சியமாயின், அவை யாதொன்றையுந் துணியா. $f'(a)=0$ ஆயும். $f''(a)=0$ ஆயுமிருந்தால், $x=a$ என்பதில் $f(x)$ இனது போக்கைப்பற்றி யாதொன்றுங் கூறமுடியாது. அது ஓர் உயர்வாய் அன்றி ஓர் இழிவாய் அன்றி உயர்விழிவுகளின்றியதாய் இருக்கலாம்.

அத்தியாயம் 4

தொகையிடல்

குறித்த ஒரு வீச்சில் எல்லா x இற்கும் $\phi'(x)=f(x)$ ஆகுமாறு $\phi(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பாயின், அவ்வீச்சில் $\phi(x)$ என்பதை $f(x)$ இன் தொகையீடு எனக் கூறுகின்றோம் ; அதனை

$$\phi(x)=\int f(x)\,dx \text{ என எழுதுகின்றோம்.}$$

$f(x)$ என்பது தரப்பட்டால் $\phi(x)$ என்பதைக் காணுஞ் செய்கை **தொகையிடல்** எனப்படும் ; $f(x)$ என்பது தொகையிடப்படுஞ் சார்பு எனப்படும்.

$f(x)$ என்பது $a\leqq x\leqq b$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதெனின் (a,b) யில் எல்லா x இற்கும் $\phi'(x)=f(x)$ ஆகுமாறு $\phi(x)$ என்னும் ஒரு சார்பு காணப்படலாம் என நிறுவலாம். இப்பொதுத் தேற்றத்தை நிறுவ அவாவவில்லை. $\phi(x)$ என்பது $f(x)$ இனது தொகையீடு எனின்

$$\frac{d}{dx}\Big\{\phi(x)+C\Big\}=\frac{d}{dx}\Big\{\phi(x)\Big\} \text{ ஆகையால்,}$$

C என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்கும்போது $\phi(x)+C$ என்பதும் ஒரு தொகையீடெனக் காண்கின்றோம்.

மறுதலையாக, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ என்பன $f(x)$ இனுடைய இரண்டு தொகை, யீடுகளாயின், $\phi_1(x)-\phi_2(x)$ என்பது எல்லா x இற்கும் மாறுதிருக்கும். அதற்குக் காரணம் எல்லா x இற்கும்

$$\frac{d}{dx}\Big\{\phi_1(x)-\phi_2(x)\Big\}=\phi_1'(x)-\phi_2'(x)=0 \text{ என்பது.}$$

ஆகவே, $\phi(x)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு தொகையீடு எனின், $\int f(x)\,dx=\phi(x)+C$ என எழுதி அதனை **வரையறுத தொகையீடு** எனக்கூறுகின்றோம். இங்கு C என்பது கற்பனையான ஒரு மாறிலியாகும்.

தொகையீட்டுத் தேற்றங்கள்.

(1) k என்பது ஒரு மாறிலியாயின், $\int \mathbf{kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx}$.

$\phi(x)$ என்பது $f(x)$ இன் வரையறுத தொகையீடாகுக.

ஆயின் $\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{k\,\phi(x)\right\} = k\frac{d}{dx}\phi(x) = k\,f(x)$$

$$\therefore \int k f(x)\,dx = k\,\phi(x) = k\int f(x)\,dx.$$

(2) $$\int\left\{f_1(x) + f_2(x)\right\}dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

$\phi_1(x) = \int f_1(x)\,dx$ ஆயும் $\phi_2(x) = \int f_2(x)\,dx$ ஆயுமிருக்க.

ஆயின், $\frac{d}{dx}\phi_1(x) = f_1(x)$, $\frac{d}{dx}\phi_2(x) = f_2(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\phi_1(x) + \phi_2(x)\right\} = f_1(x) + f_2(x).$$

$$\therefore \int\left\{f_1(x) + f_2(x)\right\}dx = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

நியமச் சூத்திரங்கள்.

1. n என்பது -1 இற்குச் சமனல்லாத ஒரு மாறிலியாயின்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n.$$

$$\therefore\ n + 1 \neq 0 \text{ எனின், } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

n என்பது மறையாயின், $x = 0$ என்னும் பெறுமானத் தொகையீட்டு வீச்சிலிருந்து புறக்கணிக்கப்பட வேண்டும்.

2. எல்லா x இற்கும் $\frac{d}{dx}(\text{சைன் } x) = \text{கோசை } x$.

$$\therefore \int \text{கோசை } x\,dx = \text{சைன் } x + C.$$

பொதுவாக, a என்பது பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலியாயின்,

$$\int \text{கோசை } ax\,dx = \frac{\text{சைன் } ax}{a} + C.$$

3. எல்லா x இற்கும் $\frac{d}{dx}(-\text{கோசை } x) = \text{சைன் } x$.

$$\therefore \int \text{சைன் } x\,dx = -\ \text{கோசை } x + C.$$

பொதுவாக, a என்பது பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலியாயின்,

$$\int \text{சைன் } ax\,dx = -\frac{\text{கோசை } ax}{a} + C.$$

4. x என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபோது,

$$\frac{d}{dx}(\text{தான் } x) = \text{சீக}^2 x.$$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கு உட்படாத x இனுடைய பெறுமானங்களுள் யாதுமொரு வீச்சில்,

$$\int \text{சீக}^2 x\,dx = \text{தான் } x + C.$$

5. x என்பது π யின் மடங்கல்லாதபொழுது,

$$\frac{d}{dx}(-\text{கோதா } x) = \text{கோசீ}^2 x.$$

$\therefore$ π இன் மடங்கு உட்படாத x இனுடைய பெறுமானங்களுள் யாதுமொரு வீச்சில்,

$$\int \text{கோசீ}^2\, x dX = -\text{கோதா } x + C.$$

6. x என்பது $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கல்லாதபோது,

$$\frac{d}{dx}(\text{சீக } x) = \text{சீக } x \text{ தான் } x.$$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2}$ இன் ஒற்றை மடங்கு உட்படாத x இன் யாதுமொரு வீச்சில்,

$$\int \text{சீக } x \text{ தான் } x\,dx = \text{சீக } x + C.$$

7. x என்பது π இன் மடங்கல்லாதபோது,

$$\frac{d}{dx}(-\text{கோசீ } x) = \text{கோசீ } x \text{ கோதா } x.$$

$\therefore$ π யின் மடங்கு உட்படாத x இன் யாதுமொரு வீச்சில்,

$$\int \text{கோசீ } x \text{ கோதா } x dx = -\ \text{கோசீ } x + C.$$

8. $-1<x<1$ ஆக, நேர்மாறு சார்பு தனது தலைமைப் பெறுமானத்தைப் பெற்றால்

$$\frac{d}{dx}(\text{சைன்}^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

$$\therefore \quad -1<x<1 \text{ என்பதில்}, \int\frac{1}{\sqrt{(1-\mathbf{x}^2)}}\,\mathbf{dx}=\text{சைன்}^{-1}\mathbf{x}+\mathbf{C}.$$

a என்பது ஒரு நேர் மாறிலியாயிருந்தால், $a=\sqrt{a^2}$ ஆயிருத்தலால்

$$\frac{d}{dx}\left(\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$\therefore \quad -a<x<a \text{ என்பதில்}, \int\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2)}}\,\mathbf{dx}=\text{சைன்}^{-1}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\mathbf{C}.$$

9. எல்லா x இற்கும் $\frac{d}{dx}(\text{தான்}^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a என்பது பூச்சியமல்லாத யாதுமொரு மாறிலியாயின்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

$$\therefore \text{ எல்லா } x \text{ இற்கும் } \int\frac{1}{\mathbf{a}^2+\mathbf{x}^2}\,\mathbf{dx}=\frac{1}{\mathbf{a}}\,\text{தான்}^{-1}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\mathbf{C}.$$

உதாரணங்கள்.

(1) $$\int\text{சைன்}^2x\,dx=\int\tfrac{1}{2}(1-\text{கோசை } 2x)\,dx$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{\text{சைன் } 2x}{4}+C.$$

(2) $$\int\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$
$$=\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$$

(3) $$\int\text{தான்}^2x\,dx=\int(\text{சீக}^2x-1)\,dx$$
$$=\text{தான்}\,x-x+C.$$

(4) $$\int\text{சைன்}\,x\,\text{சைன் } 2x\,dx=\int\tfrac{1}{2}(\text{கோசை}\,x-\text{கோசை } 3x)\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\text{சைன்}\,x-\frac{\text{சைன் } 3x}{3}\right)+C.$$

வரையறுத்த தொகையீடு.

$f(x)$ என்பது $a\leqq x\leqq b$ என்பதிலே தொடர்ச்சியுள்ளதாகுக ;

$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ என்பன $f(x)$ இனுடைய இரண்டு தொகையீடுகளாகுக.

ஆயின், C என்பது ஒரு மாறிலியெனின்,

$$\phi_2(x)=\phi_1(x)+C,$$

$$\therefore\ \phi_2(b)=\phi_1(b)+C;\ \phi_2(a)=\phi_1(a)+C.$$

$$\therefore\ \phi_2(b)-\phi_2(a)=\phi_1(b)-\phi_1(a).$$

$\therefore\ \phi(x)$ என்பது $f(x)$ இன் யாதுமொரு தொகையீடாயின்,

$\phi(b)-\phi(a)$ என்பதற்கு என்றும் ஒரே பெறுமானம் உண்டு.

இப்பெறுமானம் $f(x)$ என்னுஞ் சார்பின் வடிவையும், a, b, என்னும் எண்களையும் சார்கின்றது. அது (a, b) என்னும் இடையில் $f(x)$ இன் **வரையறுத்த தொகையீடு** எனப்படும் ;

அது $$\int_a^b f(x)\,dx \text{ அல்லது } \Big[\phi(x)\Big]_a^b$$

என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

$$\int_b^a f(x)\,dx \text{ என்பது } \phi(a)-\phi(b)$$

என்பதைக் குறிக்கும் ;

ஆகவே $$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

a, b, c என்பன எவையேனும் மூன்று எண்களாயின்,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\phi(b)-\phi(a),$$

$$\int_b^c f(x)\,dx=\phi(c)-\phi(b),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=\phi(c)-\phi(a).$$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx.$$

உதாரணங்கள் : (1)

$$\int_{-1}^{2}(x^2+5x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(\frac{8}{3}+\frac{20}{2}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-1\right)$$
$$=13\tfrac{1}{2}.$$

$$(2)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \Big[\text{சைன்}^{-1}x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

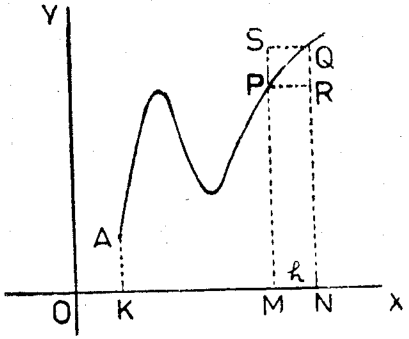
$$= \text{சைன்}^{-1}\frac{1}{2} - \text{சைன்}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}.$$

பரப்பளவுகளுக்குப் பிரயோகம்.

$f(x)$ என்பது $a \leqslant x \leqslant b$ என்பதில் x இனது தொடர்ச்சியுள்ள ஒரு சார்பாயிருக்க, x அச்சின்மேற் கிடக்கின்றதும் $y=f(x)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படுகின்றதுமா யுள்ள ஒரு வளையியை ஆராய்க.



A என்பது அவ்வளையியின்மீது a என்னுங் கிடைக்கூறு கொண்ட ஒரு புள்ளியாகுக; P என்பது அவ்வளையியின்மீது x என்னுங் கிடைக்கூறுகொண்ட ஒரு மாறும் புள்ளியாகுக; AK, PM என் பன இப்புள்ளிகளிலுள்ள நிலைக் கூறுகளாகுக. $KA=f(a)$; $MP=f(x)$.

AK, KM, MP என்னுங் கோடுகளாலும் அவ்வளையியின் வில் AP யாலுஞ் சிறையாக்கப்பட்ட பரப்பளவு P யினது நிலையோடு மாறும்; ஆகவே அது P யின் கிடைக்கூறு ஆகிய x இன் ஒரு சார்பாகும். இப் பரப்பளவை $F(x)$ ஆற் குறிக்க. Q என்பது அவ்வளையியின் மீது $(x+h)$ என்னுங் கிடைக்கூறுகொண்ட ஓர் அயற் புள்ளியாகுக; NQ என்பது Q விலுள்ள நிலைக்கூறு ஆகுக. ஆயின், AK, KN, NQ என்னுங் கோடுகளாலும் AQ என்னும் வில்லாலும் வரையறுக்கப்பட்ட பரப்பளவு $F(x+h)$ ஆகும். h என்பது நேர் என எடுப்போம்; PQ என்னும் வில் P யிலிருந்து Q விற்கு உறுதியாக ஏறுகின்றதெனக் கொள்வோம்.

$$F(x+h)-F(x) = \text{பரப்பளவு } MNQP$$

$$= \text{செவ்வகம் } PMNR + \text{பரப்பளவு } PQR$$

$$= MN.MP + \text{பரப்பளவு } PQR.$$

$$= h.f(x) + \text{பரப்பளவு } PQR.$$

$$\text{பரப்பளவு } PQR < \text{செவ்வகம் } PRQS = h.QR.$$

$$h \to 0 \text{ ஆக, } QR \to 0.$$

$$\therefore\ h \to 0 \text{ ஆக, } \frac{\text{பரப்பளவு } PQR}{h} \to 0.$$

$$\therefore\ h \to 0 \text{ ஆக, } \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= f(x) + \frac{\text{பரப்பளவு } PQR}{h} \longrightarrow f(x).$$

ஆகவே, $F'(x)$ என்பது உண்டு; அது $f(x)$ இற்குச் சமன்.

PQ என்னும் வில் P யிலிருந்து Q விற்கு உறுதியாக ஏறாத பொழுதினும் இம்முடிபு முன்போல நிறுவப்படலாம்.

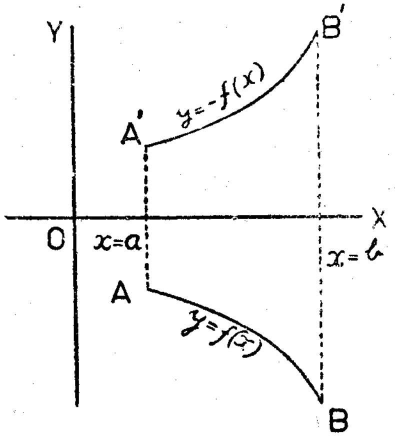
ஆகவே, $F(x)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு தொகையீடு.

P_1, P_2 என்பன x_1, x_2 $(x_2 > x_1)$ என்னுங் கிடைக்கூறுகளுடைய அவ்வளையியின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளாயின், $P_1 P_2$ என்னும் வில்லாலும் P_1, P_2 என்பனவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாலும், x அச்சா லும் அமைக்கப்படும் பரப்பளவு $F(x_2) - F(x_1)$ ஆகும்.

ஆகவே, அவ்வளையியாலும் $x=a$, $x=b$ என்னும் நிலைக்கூறுகளாலும் x அச்சாலும் அமைக்கப்படும் பரப்பளவு

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

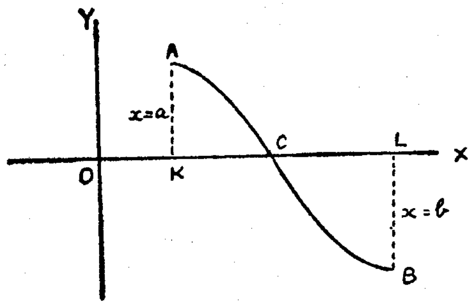
இனி, AB என்னும் வளையி $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x அச்சிற்குக் கீழே முழுவதும் கிடக் கின்றதெனக் கொள்க, ஆயின், $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடை யிலுள்ள $y=-f(x)$ என்னும் வளையி x அச்சின்மீது முன்னைய தாகிய வளையியினது திருத்தமா கிய விம்பம் $A'B'$ ஆகும்.



AB என்னும் வில்லாலும் $x=a$, $x=b$ என்னுங் கோடுகளாலும் x அச்சாலுஞ் சிறையாக்கப்படும் பரப் பளவு $A'B'$ என்னும் வில்லாலும் $x=a$, $x=b$ என்னுங் கோடுகளாலும் x அச்சாலுஞ் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவிற்குச் சமன்.

$$\therefore\ \text{பரப்பளவு} = \int_a^b -f(x)\,dx. = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

இனி, c என்பது a, b என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள ஓர் எண்ணு யிருக்க அவ்வளையி $x = a$, $x = c$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x அச்சிற்கு மேலேயும் $x = c$, $x = b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x அச்சிற்குக் கீழேயும் கிடப்பதாகக் கொள்க. AK, BL என்பன ஈற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாயின்,



$$\text{பரப்பளவு } ACK = \int_a^c f(x)\,dx,$$

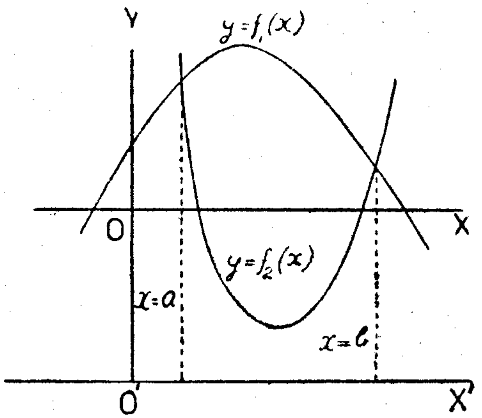
$$\text{பரப்பளவு } CBL = \int_c^b -f(x)\,dx.$$

$$\therefore \text{ பரப்பளவு } ACK + \text{பரப்பளவு } CBL = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

இது $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ என்பதற்குச் சமனான $\int_a^b f(x)\,dx$ என்பதனோடு ஒன்றாகாது.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வளையிகளாற் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவு.

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரண்டு வளையிகளினுடைய சமன்பாடுகளாகுக. $b > a$ யாயிருக்க, $x = a$, $x = b$ என்பன இரண்டு அடுத்துவரும் வெட்டுப்புள்ளிகளாகுக. $y = f_1(x)$ என்னும் வளையி ஆனது $y = f_2(x)$ என்னும் வளையிக்கு மேலே இவ்விரு புள்ளிகளுக்கும் இடையிற்கிடக்க. இவ்விரு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள வளையிகள் x அச்சிற்கு மேலே முழுவதுங் கிடக்கவில்லையெனின், உற்பத்தித் தானத்தை y அச்சின் எதிர்ப்பகுதியிலுள்ள O' என்னும் புள்ளிக்கு இடம்பெயர்த்தலால், $O'X'$ என்பது OX இற்குச் சமாந்தரமாயிருக்க, $O'X'$, $O'Y$ என்னும் புதிய அச்சுக்கள் பற்றி அவ்விரு வளையிகளும் $O'X'$ என்னும் அச்சிற்கு மேலே முழுவதுங் கிடக்குமாறு செய்யலாம்.



$O'O$ என்னும் நீளம் $= k$ எனின், புதிய அச்சுக்கள்பற்றி அவ்வளையிகளினுடைய சமன்பாடுகள் $y = f_1(x) + k$, $y = f_2(x) + k$ என்பன. ஆகவே, $x = a$, $x = b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் அவ்வளையிகளாற் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவு

$$\int_a^b \{f'(x) + k\}dx - \int_a^b \{f_2(x) + k\}\,dx$$

$$= \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx.$$

k என்னுங் கணியம் மறைந்தமையால், இப்போது புதிய அச்சுக்களைப் பற்றியுள்ளனவற்றை மறக்கலாம்.

பயிற்சி 22.

1. பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக :—

(i) சைன்$^3 x$; (ii) (சைன் x + கோசை $x)^2$;

(iii) $\dfrac{(x+1)^2}{x^4}$; (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+3)}}$; (v) $\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)}}$.

2. பின்வருவனவற்றை t ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக :—

(i) $\left(2t + \dfrac{1}{t}\right)^2$; (ii) $t(2t+1)^{\frac{1}{2}}$; (iii) $\dfrac{1}{1 - \text{கோசை}\, t}$;

(iv) $\dfrac{1}{1 + \text{கோசை}\, t}$; (v) $\dfrac{1}{4 + 9t^2}$; (vi) $\dfrac{1}{\sqrt{(4 - 9t^2)}}$;

(vii) $\dfrac{1}{(t-1)^2 + 1}$; (viii) $\dfrac{1}{\sqrt{\{4 - (t-1)^2\}}}$.

3. $x = -2$, $x = 1$ என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையில் $y = x^2 + x + 1$ என்னும் வளையியின் வில்லாலும், இப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணாலுஞ் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $x = -1$, $x = 1$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையில் $y = x^2 - x + 1$ என்னும் வளையியாலும் இப்புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகளாலுஞ் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

5. a என்பது ஒரு நேர் மாறிலியாயிருக்க, $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்னும் வளையிகளால் அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு இடையிற் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

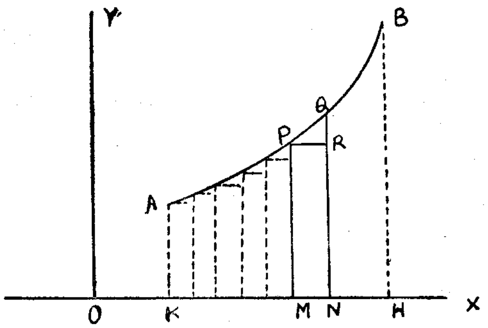
6. $x^2+y^2=4a^2$ என்னும் வட்டத்தாலும் $y^2=3ax$ என்னும் பரவளைவாலுஞ் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவுகளுட் சிறியது $\frac{1}{3}(4\pi+\sqrt{3})a^2$ எனக் காட்டுக.

வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் கொள்ளப்படும்.

$b>a$ யாயிருக்க $f(x)$ என்பது $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இனது தொடர்ச்சியான ஒரு நேர்ச்சார்பாகுக ; AB என்பது $y=f(x)$ என்னும் வளையியின் ஒத்த வில்லாகுக. AK, BH என்பன A, B என்பனவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாயின்,

$$\text{பரப்பளவு } AKHB=\int_a^b f(x)\,dx$$

AB என்னும் வில்லை ஒரு தொகையான சிறு விற்களாகப் பிரித்து அப்பிரிக்கும் புள்ளிகளுக்கூடாக நிலைக்கூறுகளை வரைக. P, Q என்பன முறையே x, $x+\delta x$ என்னும் இடைத்தூரங்களுள்ள இரண்டு அடுத்து வரும் பிரிபுள்ளிகளாகுக ; δx என்பது நேராகுக ; MP, NQ என்பன அப்புள்ளிகளிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாகுக. PR என்பது NQ என்பதை R இற் சந்திக்கும்படி x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்பட்டால், $MPRN$ என்னுஞ் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $=PM.MN=f(x)\delta x$. MN என்னும் வடிவின் சிற்றிடை ஒவ்வொன்றினது நீளமும் பூச்சியமாகுமாறு பிரிபுள்ளிகளினது தொகை வரையறையின்றிக் கூட்டப்பட, $MPKN$ என்னும் வடிவுடைய செவ்வகங்கள் எல்லாவற்றினுடைய கூட்டுத்தொகையின் எல்லை AB என்னும் வில்லாலும் A, B என்பனவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாலும் அச்சாலும் சிறையாக்கப்படும் பரப்பளவாகும்.

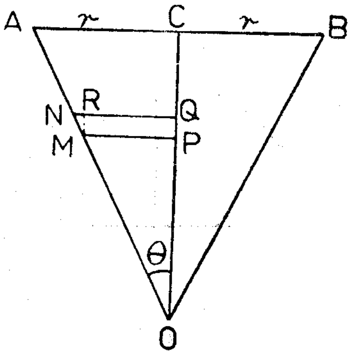


$\therefore$ δx இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் $\to 0$ ஆக

$$\sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\delta x \to \int_a^b f(x)\,dx$$

என எழுதுகின்றோம்.

உதாரணங்கள். உயரம் h ஆயும் வட்ட அடியின் ஆரை r ஆயுமுள்ள நேர்வட்டக்கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.



O என்பது அக்கூம்பின் உச்சியாகுக ; C என்பது வட்டவடியின் மையமாகுக. OAB என்பது அக்கூம்பின் அச்சு OC யினூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தால் ஆக்கப்படும் அக்கூம்பின் ஒரு பிரிவாகுக. $AC=CB=r$, $OC=h$. OAC என்னும் முக்கோணி நாலு செங்கோணங்களுக்கூடாக OC பற்றிச் சுழற்றப்பட்டால், அம்முழுக்கூம்பும் பிறக்கும். P என்பது OC யின்மீது O விலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒருபுள்ளியாகுக. Q என்பது OC யின்மீது O விலிருந்து $x+\delta x$ என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஓர் அயற்புள்ளியாகுக ; δx என்பது நேராகுக. PM, QN என்பன M, N என்பனவற்றில் OA என்பதைச் சந்திக்கும்படி OC யிற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டால், $PQNM$ என்னுஞ் சரிவகம் OC பற்றிச் சுழற்றப்படும்போது அக்கூம்பின் அடித்துண்டைப் பிறப்பிக்கும்.

MR என்பது QN இற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டால், $QRMP$ என்னும் செவ்வகம் ஒரு நேர்வட்ட உருளையைப் பிறப்பிக்கும் ; θ என்பது அக்கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணமாயுள்ள AOC என்னுங் கோணமாயின் அவ்வுருளையின் கனவளவு $\pi PM^2.PQ=\pi x^2\,\text{தான்}^2\theta\,\delta x$.

$$\therefore\ \text{அக்கூம்பின் கனவளவு} = \underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\ \sum_{x=o}^{x=h} \pi\,\text{தான்}^2\theta\, x^2\delta x$$

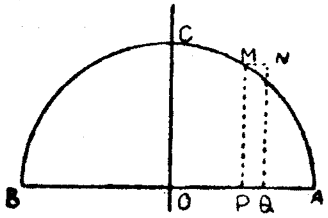
$$=\int_o^h \pi\,\text{தான்}^2\theta\, x^2dx.$$

$$=\tfrac{1}{3}\pi\,\text{தான்}^2\theta\, h^3$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

கோளத்தின் கனவளவு.

ACB என்பது மையம் O வாயும் ஆரை r ஆயுமுள்ள ஓர் அரை வட்டமாகுக. அவ்வரைவட்டம் AB என்னும் விட்டம் பற்றி 4 செங்கோணங்களுக்கூடாகச் சுழற்றப்பட்டால், r என்னும் ஆரையுடைய ஒருகோளம் உண்டாகும். OA வழியே தூரங்களை நேராகவும் OB வழியே மறையாகவுங்கொண்டு P என்பது OA யின்மீது O விலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி என்க. Q என்பது OA யின்மீது O விலிருந்து $x+\delta x$ என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஓர் அயற்புள்ளியாகுக. PM என்பது அவ்வரை வட்டத்தை M இற் சந்திக்கும்படி OA யிற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படுக. MN, QN என்பன N இற் சந்திக்குமாறு முறையே PQ, PM என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்படுக. $PQNM$ என்னுஞ் செவ்வகம் AB பற்றிச் சுழற்றப்படும் பொழுது, அது ஒரு நேர்வட்டவுருளையைப் பிறப்பிக்கும்; அவ்வுருளையின் கனவளவு $\pi PM^2.PQ = \pi(r^2-x^2)\delta x$



$$\therefore \text{அக்கோளத்தின் கனவளவு} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \sum_{x=-r}^{x=r} \pi(r^2-x^2)\delta x$$

$$= \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx$$

$$= \left[\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\pi\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3.$$

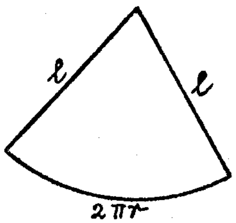
நிமிர்வட்டக்கூம்பின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு.

r என்பது ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பின் அடியின் ஆரையாகுக. அவ்வட்டவடியின் பரிதியின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியை உச்சியோடு தொடுக்குங்கோடு அக்கூம்பின் பரப்பின் ஒரு **பிறப்பாக்கி** எனப்படும். அத்தகைக் கோட்டினது நீளம் அக்கூம்பின் **சாயுயரம்** எனப்படும். இச்சாயுயரம் l ஆகுக. அக்கூம்பின் பரப்பு ஒரு பிறப்பாக்கி வழியே பிளக்கப்பட்டு அதன் பின் விரிக்கப்பட்டு ஒரு மேசையின்மீது தட்டையாகக் கிடத்தப்படுகின்ற

தெனக் கொள்க. ஆயின் அக்கூம்பின் பரப்பு l என்னும் ஆரையையுடைய ஒருவட்டத்தின் ஆரைச்சிறையை ஆக்கும்; அவ்வாரைச் சிறையின் வரையறுக்கும் வில்லினது நீளம் $2\pi r$.

அவ்வில்லாலே மையத்தில் எதிரமைக்கப்படுங் கோணம் $\frac{2\pi r}{l}$. ஆகவே, அவ்வாரைச்சிறையின்

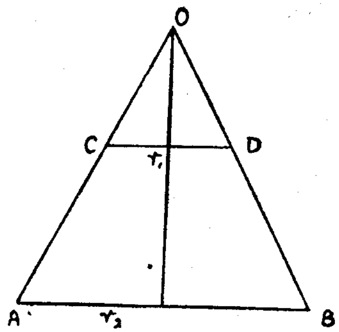
பரப்பளவு $= \frac{1}{2} l^2 \times \frac{2\pi r}{l} = \pi rl$



அதாவது அக்கூம்பின் பரப்பின் பரப்பளவு $\pi r l$.

நிமிர்வட்டக்கூம்பின் அடித்துண்டின் பரப்பளவு.

ஒரு கூம்பானது தனது அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்தால் வெட்டப்பட, உச்சியுள்ள பகுதி நீக்கப்பட்டால், மீதிப்பகுதி அக்கூம்பின் **அடித்துண்டு** எனப்படும்.



$ABDC$ என்பது OAB என்னும் நேர் வட்டக்கூம்பின் ஓர் அடித்துண்டைக் குறிக்க; r_1, r_2 என்பன அதனுடைய இரு முனைகளின் ஆரைகளாகுக. l_1, l_2 என்பன முறையே OC, OA என்னும் நீளங்களாகுக. அவ்வடித்துண்டின் பரப்பின் பரப்பளவு OAB, OCD என்னுங் கூம்புகளினுடைய பரப்புக்களின் பரப்பளவு வித்தியாசமாகும்.

ஆகவே, $r_2 > r_1$, எனின், அவ்வடித்துண்டின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

$$= \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1.$$

இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து, $\frac{r_2}{l_2} = \frac{r_1}{l_1}$.

$\therefore AC = l$ எனின், $\frac{l_2}{r_2} = \frac{l_1}{r_1} = \frac{l}{r_2 - r_1}$.

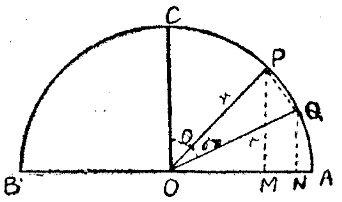
$\therefore$ அவ்வடிக்கூம்பின் பரப்பின் பரப்பளவு

$$= \pi r_2 \frac{lr_2}{r_2-r_1} - \pi r_1 \frac{lr_1}{r_2-r_1}.$$

$$= \pi l\,(r_2 + r_1).$$

கோளத்தின் பரப்பின் பரப்பளவு.

ACB என்பது மையம் O வாகவும் ஆரை r ஆகவுமுள்ள ஓர் அரை வட்டமாகுக. OC என்பது AB என்னும் விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக வுள்ள ஆரையாகுக. P என்பது பரிதியின்மீது OC யோடு OP யானது θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமாறு உள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. அக் கோணத்தின் குறிக்கு யாதுமொரு வழக்கு மேற்கொள்ளப்படலாம். Q என்பது அவ்வரை வட்டத்தின்மீது OC யோடு OQ வானது $\theta + \delta\theta$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமாறு P யிற்கு அண்மையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. PQ என்னும் நாண் AB பற்றிச் சுழற்றப்படும்பொழுது அது ஒரு கூம்பின் அடித்துண்டின் பரப்பைப் பிறப்பிக்கும்; அக்கூம்பின் சாயுயரம் PQ; M, N என்பன P, Q என்பனவற்றிலிருந்து AB யின் மீது வரையப்படுஞ் செங்குத்துக்களினுடைய அடிகளாயின், அக்கூம்பினுடைய முனைகளினுடைய ஆரைகள் PM, QN என்பனவாகும். இவ்வடிக் கூம்பின் பரப்பின் பரப்பளவு $\pi\,(PM+QN)PQ$.



$$\frac{\text{நாண்}\,PQ}{\text{வில்}\;PQ} = \frac{2r\,\text{சைன்}\,\frac{\delta\theta}{2}}{r\delta\theta}$$

$$= \frac{\text{சைன்}\,\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}$$

$$\to 1,\ \delta\theta \to 0 \text{ ஆக.}$$

அன்றியும், $\dfrac{PM}{QN} = \dfrac{r\,\text{கோசை}\,\theta}{r\,\text{கோசை}\,(\theta+\delta\theta)} \to 1,\ \delta\theta \to 0$ ஆக.

ஆகவே, அவ்வரைவட்டம் AB பற்றிச் சுழலும்போது அதனாற் பிறப்பிக்கப்படுங் கோளத்தின் பரப்பின் பரப்பளவு

$$\underset{\delta\theta\to 0}{\text{எல்}} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \pi . 2r\,\text{கோசை}\,\theta . r\delta\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi r^2\,\text{கோசை}\,\theta\delta\theta$$

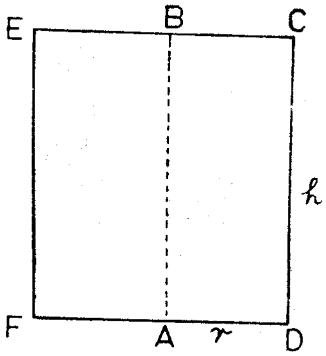
$$= \Big[2\pi r^2\,\text{சைன்}\,\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 2\pi r^2 - (-2\pi r^2)$$

$$= 4\pi r^2.$$

நிமிர்வட்டவுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு.

$ABCD$ என்னும் ஒரு செவ்வகம் பக்கம் AB பற்றிச் சுழன்றால் அச் செவ்வகமானது வட்ட அடியின் ஆரை AD யாயும் உயரம் DC யாயுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டவுருளையைப் பிறப்பிக்கும். $AD = r$ ஆயும் $DC = h$ ஆயும் இருக்க. அவ்வுருளையின் அச்சு AB யிற்குச் சமாந்தரமான அவ்வுருளையின் வளைபரப்பின் மீதுள்ள ஒரு கோடு அவ்வுருளையின் ஒரு பிறப்பாக்கி எனப்படும். அவ்வுருளையின் வளைபரப்பானது ஒரு பிறப்பாக்கி வழியே வெட்டப்பட்டு ஒரு மேசையின்மீது தட்டையாகக் கிடத்தப்பட்டால், அது பக்கங்கள் $2\pi r$, h என்பனவாயுள்ள ஒரு செவ்வகத்தை ஆக்கும்.



ஆகவே, அவ்வுருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi rh$. அவ்வுருளையின் கனவளவானது அடியின் பரப்பளவை உயரத்தாற் பெருக்கவரும் பெருக்கத்திற்குச் சமன் எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

$$\therefore \text{ கனவளவு } = \pi r^2 h.$$

பயிற்சி 23.

1. இரண்டு சமாந்தரமான தளங்களுக்கு இடையில் அமைக்கப்பட்ட r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் பகுதியின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi\,(b-a)(3r^2-b^2-a^2-ab)$ எனக் காட்டுக.

இங்கு a, b என்பன அத்தளங்களிலிருந்து அக்கோள மையத்தினுடைய தூரங்கள்; $b>a$; அத்தளங்கள் அக்கோள மையத்தின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களில் இருத்தற்கேற்ப a, b என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி அல்லது மறைக்குறிகள் உண்டு.

2. d என்பது இரு சமாந்தரமான தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரமாயின் அவ்விரு சமாந்தரமான தளங்களுக்கு இடையில் அமைக்கப்படும் r என்னும் ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் பரப்புப் பகுதியின் பரப்பளவு $2\pi rd$ எனக் காட்டுக.

3. முனைகளினுடைய ஆரைகள் r_1, r_2 என்பனவாயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு கூம்பின் அடித்துண்டின் கனவளவு

$$\tfrac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$ எனக் காட்டுக.

4. A என்பது ஆரை r ஆயும் மையம் O வாயுமுள்ள ஒரு கோளத்தின் பரப்பின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி. A யில் உச்சியும் AO வழியே அச்சும் கோதா$^{-1}$ 3 இற்குச் சமனான அரையுச்சிக்கோணமும் உள்ள நிமிர்வட்டக் கூம்பிற்குள் அமைக்கப்படும் அக்கோளத்தின் பகுதி தோண்டி எடுக்கப்படுகின்றது. மீதிப்பகுதியின் கனவளவு $\frac{27}{25}\pi r^3$ எனக் காட்டுக.

5. a, b என்னும் ஆரைகளுள்ள இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெளியாலே தொடுகின்றன; மையமிணைகோட்டின் வழியே தன் அச்சையுடைய ஒரு நிமிர்வட்டக்கூம்பு அவையிரண்டையும் உள்ளடக்கி அவற்றைத் தொடுகின்றது. அக்கோளத்தோடு அக்கூம்பினுடைய தொடுவட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோளப்பகுதிகளின் மொத்தப் பரப்பின் பரப்பளவு $4\pi ab$ என நிறுவுக.

அத்தியாயம் 5

அடுக்குக்குறிச் சார்பு

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ஆகிய முடிவில் தொடரானது x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் ஒருங்குமென நிறுவலாம்.

தொடரின் கூட்டுத் தொகை $f(x)$ இனாற் குறிக்கப்படுமாயின், $f(x) \times f(y) = f(x+y)$ எனவும் நிறுவல் கூடும்.

அதாவது

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots \frac{y^n}{n!} + \ldots\right)$$
$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots\ldots$$

இப்பெறுபேறுகள் முடிவில் தொடரிலுள்ள சில தேற்றங்களைக்கொண்டு திட்டமாக நிறுவப்படல் கூடும். எங்கள் தேவைகளுக்கு இப்பெறுபேறுகளை எடுகோள்களாகக் கருதுவோம்.

$f(1)$ ஆனது e யினாற் கருதப்படுவதாகுக.

அ—து : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

எல்லா உறுப்புகளும் நேராயும், முன் இரு உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 2 ஆயுமிருப்பதனால்

இன்னும்
$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{2.3.4} < \frac{1}{2^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\ e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$$

ஆனால் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ ஆனது தன் முதல் உறுப்பு 1 எனவும் பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனவுங் கொண்ட பெருக்கத் தொடரின் முடிவிலிக் கூட்டுத் தொகையாகும்.

$$\therefore e < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

ஆகவே e ஆனது 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையேயுள்ள ஓர் எண்ணுகும். இதன் செம்மையான (சரியான) பெறுமானமானது p, q என்பன முழுவெண்களாகவுள்ள $\frac{p}{q}$ எனும் வடிவத்தில் கூறப்பட முடியாது; π எனும் எண்ணைப் போல இது விகிதமுரு ஓர் எண்ணுகும்.

எங்கள் எடுகோளிலிருந்து

$$f(x_1)\times f(x_2)=f(x_1+x_2)$$

இங்கு x_1, x_2 என்பன யாதும் உண்மை எண்களாகும்.

x_3 ஆனது பிறிதொரு எண்ணுயின்.

$$f(x_1)\times f(x_2)\times f(x_3)=f(x_1+x_2)\times f(x_3)$$
$$=f(x_1+x_2+x_3)$$

n ஒரு நேர் முழு எண்ணுகவும், $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பன உண்மையான n எண்களாகவுமிருப்பின், மேலே குறிப்பிட்ட காரணத்தைத் திரும்பத் திரும்பப் பிரயோகிக்கு முறையால்

$$f(x_1)\times f(x_2)\times f(x_3)\times\ldots\times f(x_n)$$
$$=f(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

எனப் பெறலாம்.

$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=1$ என வைத்துக் கொள்க. எனவே.

$$\left[f(1)\right]^n=f(n)$$

அ—து : $f(n)=e^n$.

இங்கு n ஒரு நேர்முழுவெண்ணுகும். m ஆனது $-n$ இற்குச் சமனுன ஓர் மறைமுழுவெண்ணுகுக; எனவே n ஒரு நேரெண்ணுகும்.

ஆகவே,

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)=f(0)$$

$f(x)$ இற்கான தொடரில் $x=0$ என இடுவோமாயின், முதலுறுப்புத் தவிர மற்றைய உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாகின்றது.

எனவே

$$f(0)=1$$

$$\therefore\ f(m)=\frac{1}{f(n)}.$$

ஆனால் n ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயிருப்பதால்

$$f(n)=e^n$$

$$\therefore\ f(m)=\frac{1}{e^n}=e^{-n}=e^m$$

எனவே x நேரானதோ அல்லது மறையானதோ ஆகவுள்ள முழு எண்ணுயினும்

$$f(x)=e^x$$

$\frac{p}{n}$ ஆனது, n ஒரு நேர்முழுவெண்ணுகவும் p நேரோ அல்லது மறையோ ஆன முழுவெண்ணுகவுமுள்ள ஓர் பின்னமாகுக.

$f(x_1)\times f(x_2)\times\ldots\times f(x_n)=f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ எனுந் தொடர்பில் $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{p}{n}$ என எடுத்துக் கொள்க. ஆகவே

$$\left[f\left(\frac{p}{n}\right)\right]^n=f(p)$$

ஆனல் p ஒரு முழுவெண்ணுனமையின் $f(p)=e^p$

$\therefore\ f\left(\frac{p}{n}\right)$ ஆனது e^p யின் n ஆவது மூலங்களுள் ஒன்று.

அ—து : $f\left(\frac{p}{n}\right)=\pm e^{\frac{p}{n}}$.

இங்கே $e^{\frac{p}{n}}$ ஆனது e^p யின் n ஆவது நேர் மூலத்தைக் குறிக்கும்.

$x>0$ ஆகவிருக்கும்போது $f(x)$ இனது தொடரிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் நேராகும்.

$\therefore\ x>0$ எனும் பொழுது $f(x)>0$.

இன்னும்

$$f(x)\times f(-x)=f(x-x)=f(0)=1$$

$\therefore\ x>0$ ஆகும்பொழுது $f(-x)>0$

$\therefore\ t$ நேரோ, மறையோ, $f(t)>0$

$\therefore\ f\left(\frac{p}{n}\right)=e^{\frac{p}{n}}$.

எனவே x யாதுமொரு விகிதமுறும் எண்ணுயிருக்கும்போது, ஆரம்ப அட்சரகணிதத்தில் விகிதமுறு சுட்டியின் வரைவிலக்கணத்தின்படி

$$f(x)=e^x$$

விகிதமுருச் சுட்டிக்கு ஆரம்ப அட்சரகணிதத்தில் வரைவிலக்கணங் கூறப்படவில்லை. ஆகவே x விகிதமுருதபோது e^x இற்கு ஒரு விளக்கமுங் கொடுக்க முடியாது. ஆனல், கருதப்பட்ட முடிவில் தொடரின் கூட்டுத்தொகையான $f(x)$ ஆனது, x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும், விகிதமுறுவனவோ, விகிதமுருதனவோ திட்டமான கருத்தொன்றுடையதாகும்.

$\therefore$ x விகிதமுறுதபோது

$e^x = f(x)$ என வரைவிலக்கணங் கூறுகின்றேம்.

$f(x_1)\times f(x_2) = f(x_1+x_2)$ என்னுந் தொடர்பிலிருந்து, x_1, x_2 விகித முறுதபோதும்

$e^{x_1}\times e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ எனப் பெறுகின்றேம். அவ்வாறுக x யாதுமோர் உண்மை எண்ணுயின்

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

e^x ஆனது x இன் அடுக்குக்குறிச் சார்பென்று சொல்லப்படும்.

$x>0$ ஆயின், தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நேரானதாகும்.

$$\therefore\ x>0 \text{ ஆயின் } e^x>1.$$

x_1, x_2 என்பன $x_2>x_1$ ஆயுள்ள இரு உண்மை எண்களாகுக.

$$\text{ஆயின் } x_2 = x_1+h \quad \text{இங்கு } h>0$$

$$\therefore\ e^{x_2} = e^{x_1+h} = e^{x_1}\times e^h$$

$$h>0 \text{ காரணமாக } e^x>1\ ;$$

$$\text{இன்னும் } e^{x_1}>0$$

$$\therefore\ e^{x_2}>e^{x_1}.$$

$\therefore$ x ஆனது சகல உண்மைப் பெறுமானங்களூடாகவும் அதிகரித்துக் கொண்டு போக e^x ஆனது ஒழுங்காக அதிகரித்துக் கொண்டுபோகும்.

$$x>0 \quad \text{ஆயின்,} \quad e^x>x$$

$$\therefore\ x\to\infty \text{ ஆயின், } e^x\to\infty$$

$$e^x\times e^{-x} = e^0 = 1$$

$$\therefore\ x\to\infty \text{ ஆயின் } e^{-x} = \frac{1}{e^x}\to 0$$

$$\text{அதாவது } x\to-\infty \text{ ஆயின், } e^x\to 0.$$

$y = e^x$ இன் வரைபு.

x இன் சகல பெறுமானங்களுக்கும் $y>0$.

$\therefore$ வரைபு முழுவதும் x அச்சின்மேலே உள்ளதாகும்.

x அதிகரிக்க y அதிகரிக்கும்.

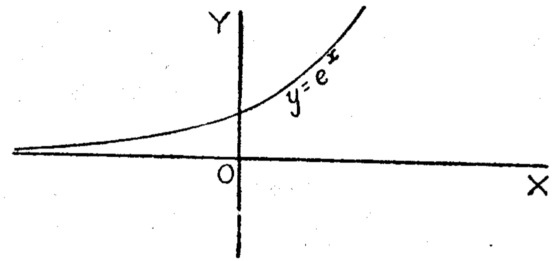
$\therefore$ வளையியானது x அச்சின் நேர்த்திசையில் ஒழுங்காக ஏறிக்கொண்டு செல்லும்.

$x\to-\infty$ ஆயின், $y\to 0$

$\therefore$ x அச்சின் மறைப்பாகமானது வளையிக்கு ஓர் அணுகுகோடாகும்.

$x\to\infty$ ஆயின், $y\to\infty$

$\therefore$ வளையியானது எல்லையில்லாது ஏறிக்கொண்டு போகும்.



வகையீட்டுக் குணகம்.

$f(x) = e^x$ ஆயின்

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x.\frac{e^h-1}{h}$$

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= 1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}+\ldots$$

$$= 1+h\phi(h)$$

இங்கே $\phi(h) = \frac{1}{2!}+\frac{h}{3!}+\frac{h^2}{4!}+\ldots$

$|h|<\frac{1}{2}$ ஆயின், $|\phi(h)|<\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\frac{|h^2|}{4!}$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$\therefore$ $|h|<\frac{1}{2}$ ஆயின்,

$|h\phi(h)|<2|h|$

$\therefore$ $h\to 0$ ஆயின், $|h\phi(h)|\to 0$

$\therefore$ $h\to 0$ ஆயின், $\frac{e^h-1}{h}\to 1$

$\therefore$ x இன் யாதுமோர் நிலைத்த பெறுமானத்திற்கு $h\to 0$ ஆயின்

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to e^x.$$

∴ x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் e^x வகையிடக் கூடியதாகும். இன்னும் அது தானே தனது வகையீட்டுக் குணகமாகும் ஒரு தனி இயல்பையும் உடையதாகும்.

எனவே

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

உதாரணம்.

x ஐக் குறித்து $e^{\text{சைன் } x}$ ஐ வகையிடுக.

$u =$ சைன் x எனவும் $y = e^{\text{சைன் } x}$ எனவும் இடுக.

ஆயின் $y = e^u$, $\qquad \frac{dy}{du} = e^u.$

∴ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^{\text{சைன் } x}$ கோசை x

மடக்கைச் சார்பு

வரைவிலக்கணம்.

$x = e^y$ ஆயின் $y =$ மட$_e x$

அடுக்குக் குறிச் சார்பு உடைமைகளிலிருந்து,

(i) $x > 0$ ஆயிருக்கும் பொழுது மட்டுமே மட x ஆனது வரையறையுடைத்தாகும். அது ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பு.

(ii) x நேர் பெறுமானத்தைக் கொண்டு அதிகரிக்க மட x ஒழுங்காக அதிகரிக்கின்றது.

(iii) $x \to +0$ ஆயின், மட $x \to -\infty$

(iv) $x \to \infty$ ஆயின், மட $x \to \infty$

(v) மட $1 = 0$, $0 < x < 1$ ஆயின் மட $x < 0$,

$x > 1$ ஆயின் மட $x > 0$.

x_1, x_2 என்பன நேராயின், மட $x_1x_2 =$ மட $x_1 +$ மட x_2.

$y_1 =$ மட x_1 எனவும் $y_2 =$ மட x_2 எனவுமாகுக.

ஆயின் $x_1 = e^{y_1}$, $x_2 = e^{y_2}$

∴ $x_1x_2 = e^{y_1+y_2}$

∴ மட $(x_1x_2) = y_1 + y_2 =$ மட $x_1 +$ மட x_2

p யானது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாயின், $x > 0$ ஆயிருக்கும்போது மட $(x^p) = p$ மட x.

n ஒரு முழு நேரெண்ணாகுக. இன்னும் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பன n நேரெண்களாகுக.

ஆயின் மட $(x_1x_2 \ldots\ldots x_n)$

$=$ மட $x_1 +$ மட $(x_2x_3 \ldots\ldots x_n)$

$=$ மட $x_1 +$ மட $x_2 +$ மட $(x_3x_4 \ldots\ldots x_n)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=$ மட $x_1 +$ மட $x_2 +$ மட $x_3 + \ldots\ldots +$ மட x_n

$x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x_n = x$ என வைத்துக்கொள்க.

ஆயின் மட $(x^n) = n$ மட x

m ஆனது $-n$ இற்குச் சமானமான ஒரு முழு மறையெண்ணாகுக.

ஆயின் $x^m \times x^n = 1$

∴ மட $(x^m) +$ மட $(x^n) = 0$

∴ மட $(x)^m = -$ மட (x^n)

ஆனால் n முழு நேரெண்ணானமையின் மட $(x^n) = n.$ மட x

∴ மட $(x^m) = -n$ மட $x = m$ மட x.

$p = \frac{m}{n}$ ஆகுக. இங்கே m, n என்பன, n நேராகவுள்ள, இரு முழு எண்களாகுக.

$y = x^p = x^{m/n}$ ஆகுக.

ஆயின் $y^n = x^m$

∴ மட $(y^n) =$ மட (x^m)

∴ n மட $y = m.$ மட x.

∴ மட $y = \frac{m}{n}$ மட $x = p.$ மட x.

∴ மட $(x^p) = p.$ மட x.

p விகிதமுறாத போதும் $x > 0$ ஆனபோதும் x^p யின் விளக்கம்

p விகிதமுறு போதும் $x > 0$ ஆனபோதும்,

மட $(x^p) = p.$ மட x

∴ $x^p = e^{p.\text{ மட } x}$

$e^{p \text{ மட } x}$ ஆனது p விகிதமுறாதபோதும் கருத்துடையது.

∴ p விகிதமுறாதபோது $x^p = e^{p \text{ மட } x}$ என வரைவிலக்கணங் கூறுகின்றோம். விகிதமுறு சுட்டிகளுக்கு நிறுவப்பட்டுள்ள மூன்று விதிகளும் விகிதமுறாச்சுட்டிகளுக்கும் பொருந்துவனவாகும்.

p யாதுமோர் எண்ணுயின், விகிதமுறு எண்ணுயினென்ன விகிதமுரு எண்ணுயினென்ன,

$$x^p = e^{p \text{ மட } x}$$

$\therefore$ மட $x^p = p.$ மட $x.$

$$\therefore \quad x^p \times x^q = e^{p \text{ மட } x} \times e^{q \text{ மட } x}$$
$$= e^{(p+q) \text{ மட } x} = x^{p+q} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(x^p)^q = e^{q\,(\text{மட } xp)}$$
$$= e^{p\,q \text{ மட } x}$$
$$= x^{pq} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$(x\,y)^p = e^{p \text{ மட } (x\,y)} = e^{p\,(\text{மட } x + \text{மட } y)}$$
$$= e^{p \text{ மட } x} \times e^{p \text{ மட } y}$$
$$= x^p \times y^p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

வகையீட்டுக் குணகம்.

$y =$ மட x ஆகுக.

இங்கே $x > 0$

ஆயின், $x = e^y.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = e^y = x$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

அதாவது $x > 0$ ஆகவிருக்கும்போது,

$x < 0$ ஆகுக ; ஆயின்

$$\frac{d}{dx}(\text{மட } x) = \frac{1}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

மட$(-x)$ உம் உளதாகும்.

இங்கு, $y =$ மட $(-x)$ உம் $u = -x$ உம் ஆகுக.

ஆயின் $y =$ மட $u.$, $u > 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} = \frac{1}{x}$$

$\therefore$ $x < 0$ ஆயிருக்கையில்

$$\frac{d}{dx}\left[\text{மட}(-x)\right] = \frac{1}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

(A) யிலும் (B) யிலும் இருந்து, $x \neq 0$ ஆயிருக்க,

$$\frac{d}{dx}\left(\text{மட } |x|\right) = \frac{1}{x}.$$

உதாரணம் : (1)

x ஐக் குறித்து

$y =$ மட $(x^2 +$ தான்$^2 x)$ ஐ வகையிடுக.

$y =$ மட $(x^2 +$ தான்$^2 x)$ எனவும் $u = x^2 +$ தான்$^2 x$ எனவும் ஆகுக.

ஆயின் $y =$ மட $u.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{u}(2x + 2 \text{ தான் } x \text{ சீக}^2 x)$$
$$= \frac{2x + 2 \text{ தான் } x \text{சீக}^2 x}{x^2 + \text{தான்}^2 x}.$$

உதாரணம் : (2)

p யானது x இற் சாராததும் விகிதமுறுததுமான ஓர் எண்ணுயின் x ஐக் குறித்து x^p யை வகையிடுக.

$$x^p = e^{p \text{ மட } x}.$$
$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^p) = e^{p \text{ மட } x} \times \frac{p}{x}.$$
$$= x^p \times \frac{p}{x} = p.x^{p-1}.$$

உதாரணம் : (3)

$x > 0$ ஆயிருக்க x ஐக் குறித்து x^x ஐ வகையிடுக.

$$x^x = e^{x \text{ மட } x}.$$
$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^x) = e^{x \text{ மட } x}.\left(\frac{x}{x} + \text{மட } x\right)$$
$$= x^x(1 + \text{மட } x)$$

யாதேனும் அடிக்குரிய மடக்கை.

$y =$ மட x என எழுதும்போது, பொதுவாக அம்மடக்கையானது e எனும் அடியையே கொண்டது எனக் கருதப்படும்.

இன்னும் $\frac{d}{dx}(\text{மட } x) = \frac{1}{x}$ எனும் பெறுபேறு அப்படிப்பட்ட வகைகளில் மட்டுமே பொருந்துவதாகும்.

மடக்கைகளுக்கு எந்த அடிகளைக் குறித்தேனும் வரைவிலக்கணங் கூறலாம்.

x உம் a யும்

$x = a^p$ எனவாகவுள்ள இரு நேரெண்களாகுக. ஆயின்

$$p = \text{மட}_a\, x$$

மட$_a\, x$ இற்கும் மட$_e\, x$ இற்குமிடையேயுள்ள ஒரு எளிய தொடர்பானது பின்வருமாறு சுலபமாகப் பெறப்படும் :—

$$\text{மட}_e\, x = \text{மட}_e\,(a^p) = p\ \text{மட}_e\, a$$

$$\therefore\ p = \frac{\text{மட}_e x}{\text{மட}_e a}$$

அதாவது $\text{மட}_a x = \dfrac{\text{மட}_e x}{\text{மட}_e a}$

குறிப்பாக $\text{மட}_{10} x = \dfrac{\text{மட}_e x}{\text{மட}_e 10}$

∴ அடி e யாகவுள்ள மடக்கைகள் தெரியுமானால், அடி 10 ஆகவுள்ள மடக்கைகள் கணிக்கப்படலாம்.

தொகையிடுதல்.

a யானது பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலியாயின்

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = e^{ax}$$

$$\therefore\ \int e^{ax}.\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

a ஒரு மாறிலியாயின் $x + a \neq 0$ ஆயிருக்கும்போது

$$\frac{d}{dx}(\text{மட}|x+a|) = \frac{1}{x+a}$$

$$\therefore\ \int \frac{dx}{x+a} = \text{மட}|x+a| + C$$

$f(x)$ ஆனது பூச்சியமல்லாது, x இன் வகையிடக்கூடிய ஒரு சார்பாயின்

$$\frac{d}{dx}\text{மட}\,|f(x)| = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\therefore\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}.\,dx = \text{மட}\,|f(x)| + C.$$

உதாரணம் :

$$\int \frac{x}{x^2+1}.\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}.\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\text{மட}\,(x^2+1) + C$$

$$\int \text{தான்}\ x.\,dx = -\int -\frac{\text{சைன்}\ x}{\text{கோசை}\ x}.\,dx$$

$$= -\,\text{மட}\,|\text{கோசை}\ x| + C$$

$$= \text{மட}\,|\text{சீக}\ x| + C$$

$$\int \text{கோதா}\ x.\,dx = \int \frac{\text{கோசை}\ x}{\text{சைன்}\ x}.dx$$

$$= \text{மட}\,|\text{சைன்}\ x| + C$$

உதாரணம் :

$\displaystyle\int \frac{\text{சைன்}\ x + \text{கோசை}\ x}{2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x}\, dx$ என்னுந் தொகையீட்டைக் கணிக்க

$$\frac{d}{dx}(2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x)$$

$$= -2\ \text{சைன்}\ x + 3\ \text{கோசை}\ x$$

$$\text{சைன்}\ x + \text{கோசை}\ x = p\ (2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x)$$
$$+\, q\,(-2\ \text{சைன்}\ x + 3\ \text{கோசை}\ x)$$

என வரக்கூடியதாக p, q எனும் மாறிலிகளைத் தேர்தல் கூடும்.

சைன் x இனதும் கோசை x இனதுங் குணகங்களை வெவ்வேறாகச் சமன்படுத்த

$$1 = 3p - 2q$$

$$1 = 2p + 3q$$

$$\therefore\qquad p = \frac{5}{13},\ q = \frac{1}{13}$$

$$\therefore\ \int \frac{\text{சைன்}\ x + \text{கோசை}\ x}{2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x}\, dx$$

$$= \int \left\{\frac{5}{13} + \frac{1}{13}\ \frac{(-2\ \text{சைன்}\ x + 3\ \text{கோசை}\ x)}{2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x}\right\} dx.$$

$$= \frac{5}{13}.\,x + \frac{1}{13}\,\text{மட}\,|2\ \text{கோசை}\ x + 3\ \text{சைன்}\ x| + C$$

பகுதிகளாய்த் தொகையிடுதல்.

u, v என்பன x இன் வகையிடக்கூடிய சார்புகளாயின்

$$\frac{d}{dx}(u\,v) = u\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}.$$

$$\therefore\ \int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx = uv$$

$$\therefore\ \int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\,\frac{du}{dx}\,dx.$$

பகுதிகளாய்த் தொகையிடும் முறைக்கு இதுவே சூத்திரமாகும்.

உதாரணம் :

(1) $\int x$ கோசை $x\,dx$ என்னுந் தொகையீட்டைக் கணிக்க.

$u = x$ எனவும், $\frac{dv}{dx} =$ கோசை x எனவும் இடுக.

$v =$ சைன் x என எடுத்துக்கொள்வோம்.

ஆயின்

$$\int x \text{ கோசை } x\,dx = x \text{ சைன் } x - \int \text{ சைன் } x\,dx$$

$$= x \text{ சைன் } x + \text{ கோசை } x + C.$$

(2) $\int e^x$ சைன் $x\,dx$ என்னுந் தொகையீட்டைக் கணிக்க.

$u = e^x$, $\frac{dv}{dx} =$ சைன் x அல்லது

$v = -$ கோசை x என எடுத்துக்கொள்க.

எனவே $\int e^x$ சைன் $x\,dx$

$$= -e^x \text{ கோசை } x + \int e^x \text{ கோசை } x\ dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இப்போது $\int e^x$ கோசை $x\,dx$ இற்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$\int e^x \text{ கோசை } x.\,dx = \int e^x \frac{d}{dx}(\text{சைன் } x)\,dx$$

$$= e^x \text{ சைன் } x - \int e^x \text{சைன் } x\,dx : \ldots.(2)$$

$\therefore$ (1) இலும் (2) இலுமிருந்து,

$$\int e^x \text{ சைன் } x\,dx = -e^x \text{ கோசை } x + e^x \text{ சைன் } x$$

$$- \int e^x \text{ சைன் } x\,dx.$$

$$\therefore\ 2\int e^x \text{ சைன் } x\,dx = e^x\,(\text{சைன் } x - \text{கோசை } x)$$

$$\therefore\ \int e^x \text{ சைன் } x\,dx = \frac{e^x}{2}(\text{சைன் } x - \text{கோசை } x).$$

மாறியை மாற்றுதல்.

$$f(x) = \phi'(x) \text{ ஆயின், } \int f(x)\,dx = \phi(x)$$

x ஐ வேறொரு மாறி t இன் வகையிடத்தக்க சார்பாகக் கூறுவோமாயின், $\phi(x)$ உம் $f(x)$ உம் t இன் சார்புகளாகக் கூறப்படல் கூடும்.

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx}\times\frac{dx}{dt} = f(x)\ \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\ \phi(x) = \int f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

இவ்விடத்தில்

$\therefore f-(x)\frac{dx}{dt}$ ஐ t இல் கூறியதன்பின் t ஐக் குறித்துத் தொகையிடல் செய்யப்படும்.

$$\therefore\ \int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt.$$

உதாரணம் (1)

$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)}}\,dx$ என்னுந் தொகையீட்டைக் கணிக்க.

$\sqrt{(x+1)} = t$ அல்லது $x+1 = t^2$ எனும் பிரதியீட்டை தெரிந்து கொள்க.

ஆயின், $\frac{dx}{dt} = 2t$

$$\therefore\ \int\frac{(x^2+1)}{\sqrt{(x+1)}}\,dx = \int\frac{(t^2-1)^2+1}{t}\,2t\,dt$$

$$= \int 2\,(t^4 - 2t^2 + 2)\,dt$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 2t\right)$$

$$= 2\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\,(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\,(x+1)^{\frac{1}{2}}\right] + C.$$

உதாரணம் (2)

a ஒரு நேர் மாறிலியாகவிருக்க

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad \text{இனது பெறுமானத்தைக் கணிக்க.}$$

$$x = a \,\text{சைன்}\, t \qquad \text{என இடுக.}$$

இங்கே மாறி t ஆனது $-\frac{\pi}{2}$ இற்கும் $\frac{\pi}{2}$ இற்கும் இடையே உளதாயிருக்கும் வண்ணம் வரையறை செய்யப்பட்டுளது. எனவே x ஆனது $-a$ யிற்கும் a யிற்குமிடையே மாறுகின்றது. x இன் மறு பெறுமானங்களைப் பற்றிய பிரச்சினை இப்போது தேவையில்லை.

$\sqrt{a^2 - x^2}$ நேராயிருப்பதாலும் t ஆனது $-\frac{\pi}{2}$ இற்கும் $\frac{\pi}{2}$ இற்குமிடையிலிருக்கும்போது கோசை t நேராயிருப்பதாலும், $\sqrt{a^2 - x^2} = a$ கோசை t.

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \,\text{கோசை}\, t \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int a^2 \,\text{கோசை}^2\, t\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \text{கோசை } 2t)\ dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\text{சைன் } 2t}{2} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + \text{சைன்}\, t \,\text{கோசை}\, t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \,\text{சைன்}^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \text{C}.$$

பயிற்சி 24.

1. p யாதுமொரு மாறிலியாக, $x \to \infty$ ஆயின் $x^p e^{-x} \to 0$ எனக் காட்டுக.

[p தரப்பட p யிலும் கூடியதாகவுள்ள n எனும் ஒரு முழு நேரெண்ணைத் துணிதல் கூடும்.

$$x > 0 \text{ ஆயிருக்க, } e^x > \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore 0 < x^p e^{-x} < \frac{n!}{x^{n-p}} \Big]$$

2. $x \to +0$ ஆயின் x மட $x \to 0$ எனக் காட்டுக. [பயிற்சி (1) இலிருந்து உய்த்தறிக.]

3. $(1 - x)^2 e^x$ ஓர் உயர்வையும் ஓர் இழிவையும் உடையதெனக் காட்டுக. x இன் சகல பெறுமானங்களுக்கும் சார்பின் மாறல்களை வரைக.

4. x ஐக் குறித்து e^x சைன்x இனது n ஆவது பெறுதி

$$2^{n/2} e^x \,\text{சைன்} \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

5. p ஒரு நேர் மாறிலியாயின் குறித்ததோர் எல்லைக்கு மேல்

x அதிகரிக்க (மட x)$/x^p$ ஆனது குறையுமெனக் காட்டுக.

6. A, B என்பன x இன் தொடர்பில்லாதனவாக

$$\frac{1}{2x^2 + 3x + 1} \equiv \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{x + 1}$$

எனும் உருவத்திற் குறிப்பிடு முறையாக, x ஐக் குறித்து $\frac{1}{2x^2 + 3x + 1}$ இனது தொகையீட்டைக் காண்க.

7. பின்வரும் சார்புகளை x ஐக் குறித்து தொகையிடுக

(a) மட x (b) தான்$^{-1} x$ (c) $x^2 e^x$.

8. மாறிகளை வசதியாக மாற்றியமைக்கும் முறையால் பின்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடுக.

(a) $\frac{\text{கோசை } x}{(2 + \text{சைன் } x)^2}$ (b) $e^{\text{தான் } x}$ சீக$^2 x$ (c) (மட x)$/x$

9. $t =$ தான் $\frac{x}{2}$ எனும் பிரதியீட்டால் கோசீx ஐயும் சீக x ஐயும் x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

10. $\frac{1}{5 + 4 \text{ கோசை } x}$ ஐயும் $\frac{1}{4 + 5 \text{ கோசை } x}$ ஐயும் தொகையிட அதே பிரதியீட்டைப் பிரயோகிக்க.

11. $t =$ சைன் x எனும் பிரதியீட்டால் கோசை$^9 x$ ஐயும்

$t =$ தான் x எனும் பிரதியீட்டால் சீக$^8 x$ ஐயும் தொகையிடுக.

அதிபரவளைவுச் சார்புகள்

வரைவிலக்கணம் :

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுக் கோசைன் எனப்பட்டு **அகோசைன்** x எனக் குறிக்கப்படும். $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுச் சைன் எனப்பட்டு **அசைன்** x எனக் குறிக்கப்படும். $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுத் தான்சன் எனப்பட்டு **அதான்** x எனக் குறிக்கப்படும். $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுச் சீக்கன் எனப்பட்டு **அசீக** x எனப்படும். $\frac{2}{e^x-e^{-x}}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுக் கோசீக்கன் எனப்பட்டு **அகோசீ** x எனப்படும்.

$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ என்பது x இன் அதிபரவளைவுக் கோதான்சன் எனப்பட்டு **அகோதா** x எனக் குறிக்கப்படும்.

$$\text{அகோசை } 0 = \frac{e^\circ+e^\circ}{2} = 1,$$

$$\text{அசைன் } 0 = \frac{e^\circ-e^\circ}{2} = 0,$$

$$\text{அதான் } 0 = 0,$$

$$\text{அசீக } 0 = 1.$$

அகோசீ 0, அகோதா 0 என்பவற்றிற்குப் பெறுமானமில்லை.

$x \to \infty$ ஆக, அகோசை $x \to \infty$, அசைன் $x \to \infty$;

$$\text{அதான் } x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \to 1;$$

முடிவில் தொடராக உணர்த்தப்படுமிடத்து,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{(-x)^n}{n!}+\dots$$

$$\therefore \quad \text{அகோசை } x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+$$

$$\text{அசைன் } x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\therefore \quad \text{அகோசை } (-x) = \text{அகோசை } x,$$

$$\text{அசைன் } (-x) = \text{அசைன் } x,$$

$$\therefore \quad \text{அதான் } (-x) = \frac{\text{அசைன் } (-x)}{\text{அகோசை } (-x)} = \text{அதான் } x.$$

மேலும், x ஆனது நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கூடாகக் கூடுதலுற அகோசை x, அசைன் x என்பன இரண்டும் உறுதியாகக் கூடுதலுறும் ;

$$\text{அதான் } x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1} = 1-\frac{2}{e^{2x}+1}$$

ஆதலால், அதான் x என்பதும் உறுதியாகக் கூடுதலுறும்.

எல்லா x இற்கும் அகோசை^{2} x − அசைன்^{2} $x = 1$.

$$\text{ஏனெனின், அகோசை}^2\, x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$$

$$\text{அசைன்}^2\, x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$$

$$\therefore \quad \text{அகோசை}^2\, x - \text{அசைன்}^2\, x = \tfrac{4}{4} = 1.$$

எல்லா x இற்கும் அகோசை^{2} $x \geqslant 1$ ஆதலால், அகோசை^{2} x ஆல் வகுக்க,

$$1 - \text{தான்}^2\, x = \text{அசீக}^2\, x.$$

$x \neq 0$ எனின், அசைன்^{2} x ஆல் வகுக்க,

$$\text{அகோதா}^2\, x - 1 = \text{அகோசீ}^2\, x.$$

அகோசை (x_1+x_2) = அகோசை x_1 அகோசை x_2 − அசைன் x_1 அசைன் x_2

ஏனெனின், அகோசை x_1 அகோசை x_2

$$= \frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2} \cdot \frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{x_1+x_2}+e^{x_1-x_2}+e^{-x_1+x_2}+e^{-x_1-x_2}\right),$$

$$\text{அசைன் } x_1 \text{ அசைன் } x_2 = \frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2} \cdot \frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{x_1+x_2}-e^{x_1-x_2}-e^{-x_1+o_2}+e^{-x_1-x_2}\right).$$

$\therefore$ அகோசை x_1 அகோசை x_2 + அசைன் x_1 அசைன் x_2

$$=\tfrac{1}{2}\left(e^{x_1+x_2}+e^{-x_1-x_2}\right)^2=\text{அகோசை }(x_1+x_2).$$

இது எல்லா x_1, x_2 இற்கும் உண்மையானமையால் x_2 இற்குப் பதிலாக $-x_2$ எழுதப்பட,

$$\text{அகோசை }(x_1-x_2)=\text{அகோசை }x_1\text{ அகோசை }(-x_2)+\text{அசைன் }x_1\text{ அசைன் }(-x_2)$$
$$=\text{அகோசை }x_1\text{ அகோசை }x_2-\text{அசைன் }x_1\text{ அசைன் }x_2$$

இதே மாதிரி,

அசைன் (x_1+x_2) = அசைன் x_1 அகோசை x_2 + அகோசை x_1 அசைன் x_2,

அசைன் (x_1-x_2) அசைன் x_1 அகோசை x_2 + அகோசை x_1 அசைன் x_2

என்பனவும் நிறுவப்படலாம்.

$$\text{இனி, அதான் }(x_1+x_2)=\frac{\text{அசைன் }(x_1+x_2)}{\text{அகோசை }(x_1+x_2)}$$

$$\frac{\text{அசைன் }x_1\text{ அகோசை }x_2+\text{அகோசை }x_1\text{ அசைன் }x_2}{\text{அகோசை }x_1\text{ அகோசை }x_2+\text{அசைன் }x_1\text{ அசைன் }x_2},$$

தொகுதியையும் பகுதியையும் அகோசை x_1 அகோசை x_2 என்பதால் வகுக்க,

$$\frac{\text{அதான் }x_1+\text{அதான் }x_2}{1+\text{அதான் }x_1\text{ அதான் }x_2}.$$

x_2 இற்குப்பதிலாக $-x_2$ ஐ எழுத

$$\text{அதான் }(x_1-x_2)=\frac{\text{அதான் }x_1-\text{அதான் }x_2}{1-\text{அதான் }x_1\text{ அதான் }x_2}.$$

$x=x_2=x_1$ எனப் பிரதியிட.

அகோசை $2x$ = அகோசை^2x + அசைன்^2x,

அசைன் $2x = 2$ அசைன் x அகோசை x,

$$\text{அதான் }2x=\frac{2\text{ அதான் }x}{1+\text{அதான்}^2x}.$$

வகையீட்டுக் குணகங்கள்.

$$\frac{d}{dx}(\text{அகோசை }x)=\frac{d}{dx}(e^x+e^{-x})\tfrac{1}{2}$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x\text{அசைன்}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{அசைன் }x)=\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})\tfrac{1}{2}$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\text{ அகோசை }x.$$

$$\frac{d}{dx}(\text{அதான் }x)=\frac{d}{dx}\frac{(\text{அசைன் }x)}{(\text{அகோசை }x)}$$
$$=\frac{\text{அகோசை }x\text{ அகோசை }x-\text{அசைன் }x\text{ அசைன் }x}{\text{அகோசை }^2x}$$
$$=\frac{\text{அகோசை}^2x-\text{அசைன்}^2x}{\text{அகோசை}^2x}$$
$$=\frac{1}{\text{அகோசை}^2x}=\text{அசீக}^2x.$$

$$\frac{d}{dx}(\text{அகோதா }x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{அகோசை }x}{\text{அசைன் }x}\right)$$
$$=\frac{\text{அசைன்}^2x-\text{அகோசை}^2x}{\text{அசைன்}^2x}$$
$$=-\text{அகோசீ}^2x.$$

$$\frac{d}{dx}(\text{அசீக }x)=\frac{d}{dx}(\text{அகோசை }x)^{-1}$$
$$=-(\text{அகோசை }x)^{-2}\text{ அசைன் }x$$
$$=-\text{அசீக }x\text{ அதான் }x.$$

$$\frac{d}{dx}(\text{அகோசீ }x)=\frac{d}{dx}(\text{அசைன் }x)^{-1}$$
$$=-(\text{அசைன் }x)^{-2}\text{ அகோசை }x$$
$$=-\text{அகோசீ }x\text{ அகோதா }x.$$

நேர்மாறு அதிவரவளைவுச் சார்புகள்.

வரைவிலக்கணம்

y = அகோசை^{-1}x என்பது

x = அகோசை y என்பதைக் குறிக்கும்

y = அசைன்^{-1}x என்பது

x = அசைன் y என்பதைக் குறிக்கும்.

11—R 11681 (1/66)

$y =$ அதான்$^{-1} x$ என்பது

$x =$ அதான் y என்பதைக் குறிக்கும்.

வேறும் இவ்வாறே.

அகோசை$^{-1} x$

எல்லா y யிற்கும் அகோசை $y \geqslant 1$;

இதற்குக் காரணம்;

$$\text{அகோசை } y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

என்பதே. ஆகவே $x \geqslant 1$ ஆனுற்ருன் அகோசை$^{-1}$ இற்குப் பெறுமானமுண்டு. அன்றியும் பூச்சியத்திலிருந்து முடிவிலிக்குக் கூடுதலுற அகோசை y யானது 1 இலிருந்து முடிவிலிக்கு உறுதியாகக் கூடுதலுறும். ஆயின் x ஆனது 1 இலிருந்து முடிவிலிக்குக் கூடுதலுற அகோசை$^{-1} x$ ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து முடிவிலிக்கு உறுதியாகக் கூடுதலுறும். ஆகவே $x > 1$ எனின், அகோசை$^{-1} x$ இற்கு நேர்ப் பெறுமானம் ஒன்று மாத்திரம் உண்டு. அகோசை $(-y) =$ அகோசை y ஆனமையால், அகோசை$^{-1} x$ இற்கு ஒரு மறைப் பெறுமானமும் உண்டு ; ஆனுல் வழக்கமாய் நேர்ப் பெறுமானம் மட்டுமே எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும்.

இனி, $y =$ அகோசை$^{-1} x$ என்க.

ஆயின் $x =$ அகோசை y

$$= \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

$$\therefore \quad (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$$

அ-து, $t^2 - 2xt + 1 = 0$, $t = e^y$

$$\therefore \quad t = x \pm \sqrt{x^2 - 1} ,$$

அ-து, $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

$x = 1$ எனின், இரு பெறுமானங்களும் 1 ஒடு பொருந்தும்.

$x > 1$ எனின், இரு பெறுமானங்களும் நேராகி வேறு வேருகும்.

$$\therefore \quad y = \text{மட}_e \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$ ஆதலால்

$$\text{மட} \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \text{மட} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0.$$

$$\therefore \quad y = \pm \text{ மட } \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

ஆகவே நேர்ப் பெறுமானத்தை மட்டுமே எடுப்போமாயின்,

$$\text{அகோசை}^{-} x = \text{மட}_e \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) , \quad x \geqslant 1.$$

அசைன்$^{-1} x$

y யானது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ இற்க்கு கூடுதலுற, அசைன் y யானது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ இந்கு உறுதியாகக் கூடுதலுறும் ஆகவே x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் அசைன்$^{-1} x$ இற்கு ஓர் ஒன்றிப் பெறுமானம் உண்டு.

$$\text{அசைன்}^{-1} 0 = 0 ;$$

$x > 0$ எனின், அசைன்$^{-1} x > 0$;

$x < 0$ எனின், அசைன்$^{-1} x < 0$.

இனி $y =$ அசைன்$^{-1} x$ என்க.

ஆயின் $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$\therefore \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\therefore \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$e - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ ஆதலால்,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad y = \text{மட}_e \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\therefore \quad \text{அசைன்}^{-1} x = \text{மட}_e \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

அதான்$^{-1} x$

y யின் எப்பெறுமானத்திற்கும் e^y, e^{-y}, என்பன நேர்ப் பெறுமானங்கள் உடையனவாதலால் அதான் y யானது -1 இற்கும் $+1$ இற்குமிடையே கிடத்தல் வேண்டும். ஆகவே x ஆனது $-1, +1$ என்பவற்றிற்கிடையே கிடந்தாற்ருன் அதான்$^{-1} x$ இற்குப் பெறுமானமுண்டு.

$y =$ அதான்$^{-1} x$ ஆயின்,

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore \quad e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{2} \text{ மட}_e \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\therefore \quad \text{அதான்}^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ \text{மட}_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right), -1 < x < 1.$$

வகையீட்டுக் குணகங்கள்.

$y = \text{அகோசை}^{-1} x$ ஆகுக.

ஆயின் $x = \text{அகோசை}\, y$,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \text{அசைன்}\, y.$$

y என்பது நேர்ப் பெறுமானம் உடையதெனக் கொள்ளப்பட்டால்,

$$\text{அசைன்}\, y = \sqrt{\text{அகோசை}^2 y - 1}$$
$$= \sqrt{x^2-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$$

அதாவது $\dfrac{d}{dx}\,(\text{அகோசை}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.$

$y = \text{அசைன்}^{-1}x$ எனக.

ஆயின் $x = \text{அசைன்}\, y$,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \text{அகோசை}\, y.$$

அகோசை y என்றும் நேராதலால்,

$$\text{அகோசை}\ y = \sqrt{\text{அசைன்}^2 y + 1}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

அதாவது $\dfrac{d}{dx}\,(\text{அசைன்}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

a என்பது நேர்ப் பெறுமானமுள்ள மாறிலியாயின்,

$$\frac{d}{dx}\left(\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} \times \frac{1}{a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad x > a.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}} \times \frac{1}{a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

தொகையீட்டுச் சூத்திரங்கள்

முந்திய வகையீட்டுச் சூத்திரங்களிலிருந்து பின்வரும் தொகையீட்டுச் சூத்திரங்கள் பெறப்படும்.

a என்பது பூச்சியமல்லா மாறிலியெனின்,

(1) $\int \text{அகோசை}\ ax\ dx = \frac{1}{a}\ \text{அசைன்}\ ax + C,$

(2) $\int \text{அசைன்}\ ax\ dx = \frac{1}{a}\ \text{அகோசை}\ ax + C,$

(3) $\int \text{அசீக}^2\ ax\ dx = \frac{1}{a}\ \text{அதான்}\ ax + C,$

(4) $\int \text{அகோசீ}^2\ ax\ dx = \frac{1}{a}\ \text{அகோதா}\ ax + C,$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a} + C, \quad x > a > 0$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

(5) என்னுஞ் சூத்திரம் a நேராகி x ஆனது a யிலும் பெரிதாகுமிடத்தே உண்மையாகும். $x^2 - a^2 > 0$ ஆகி x ஆனது $-a$ யினுஞ் சிறிதாகுமிடத்தும் உண்மையாகும் ஒரு சூத்திரம் பின்வருமாறு பெறப்படும்.

$$\frac{d}{dx}\left\{\text{மட}_e\ (x + \sqrt{x^2-a^2})\right\}$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{மட}_e\ (x + \sqrt{x^2-a^2}) + C, \quad x^2 > a^2.$$

எத்தொகையீட்டுச் சூத்திரத்திலும், α என்பது மாறிலியாயிருக்க, x ஐ $x+\alpha$ வால் இடமாற்றம் செய்தால் அச்சூத்திரம் உண்மையாகவேயிருக்கும். இதற்குக் காரணம்,

$$\frac{d}{dx}\,\phi(x)=f(x) \qquad \text{ஆயின்,}$$

$$\frac{d}{dx}\,\phi(x+\alpha)=f(x+\alpha) \text{ ஆகுமென்பதே.}$$

ஆகவே,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)^2-a^2}}=\text{மட}_e\left\{x+\alpha+\sqrt{(x+\alpha)^2-a^2}\right\}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)^2+a^2}}=\text{அசைன்}^{-1}\left(\frac{x+\alpha}{a}\right)+C,\; x>0.$$

பயிற்சி

1. $\text{அகோசை } x=\dfrac{1+\text{அதான்}^2\dfrac{x}{2}}{1-\text{அதான்}^2\dfrac{x}{2}},$

   $\text{அசைன் } x=\dfrac{2\text{ அதான் }\dfrac{x}{2}}{1-\text{அதான்}^2\dfrac{x}{2}},$

எனக் காட்டுக.

2. $\text{அசைன் } 3x = 3\text{ அசைன் } x+4\text{ அசைன்}^3 x,$

   $\text{அகோசை } 3x=\text{அகோசை}^3 x-3\text{ அகோசை } x,$

என்பனவற்றை நிறுவுக.

3. $x=\text{அசைன் } t$ என்னும் பிரதியீட்டால்

$$\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}=\tfrac{1}{2}\text{ மட}_e(1+\sqrt{2})+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$$

எனக் காட்டுக.

4. x குறித்துப் பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x-3)}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+5)}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{(3-2x-x^2)}}$

5. $t=\text{அதான் } x$ எனப் பிரதியிட்டு $\text{அசீக}^6 x$ என்பதை x பற்றித் தொகையிடுக.

   $u=\text{அகோதா } x$ எனப் பிரதியிட்டு $\text{அகோசீ}^3 x$ என்பதைத் தொகையிடுக.

அட்சர கணிதம்

அத்தியாயம் 1

பல்லுறுப்பிச் சார்பு

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணும், $a_0, a_1, \ldots a_n$ என்பன மாரு மெய்யெண்களாயும், x என்பது மாறும் ஒரெண்ணும் இருந்தால், $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ என்பது n என்னும் படியுள்ள x இன் ஒரு **பல்லுறுப்பிச் சார்பு** எனப்படும். $a_0x + a_1$ என்னும் வடிவான முதலாம்படியிலுள்ள பல்லுறுப்பிச் சார்பு x இன் ஒரு படிச் சார்பு எனப்படும். n ஒருபடிச் சார்புகளின் பெருக்கம் n என்னும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாகும். அவ் n ஒருபடிச் சார்புகள் ஒவ்வொன்றும் இப் பல்லுறுப்பிச் சார்பின் ஒரு காரணியாகும். $f(x)$ என்பது x இனது தந்த ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாயும் $x-a$ என்பது x இனது தந்த ஓர் ஒருபடிச் சார்பாயும் இருந்தால், $x-a$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாய் இருக்கலாம் அன்றி ஆகாதுவிடலாம். எவ்வகையிலும், x ஐச் சாராத ஒரு மீதியைப் பெறும்வரைக்கும் $f(x)$ என்பதை $x-a$ என்பதாலே வகுக்கலாம். $x-a$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி அல்லது ஒரு காரணியன்று என்பதற்கேற்ப மீதி பூச்சியமாகும். அல்லது பூச்சியமன்ருகும்.

மீதித் தேற்றம். x என்னும் மாறியின் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பு $f(x)$ என்பது $x-a$ என்பதால் x ஐச் சாராத மீதி ஒன்று பெறப்படும் வரைக்கும் வகுக்கப்பட்டால், இம்மீதி $f(a)$ என்பதற்குச் சமன்; இங்கு $f(a)$ என்பது $f(x)$ இல் $x=a$ எனப் பிரதியிடப்பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறிக்கும்.

பெறப்படும் ஈவு x இன் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாகும். அதனை $\phi(x)$ என்பதாற் குறிக்க; R என்பது அம்மீதியாகுக. ஆயின்,

$$f(x) \equiv (x-a)\,\phi(x) + R.$$

அவ்விரு கோவைகளுஞ் சர்வசமன். $x=a$ எனப் பிரதியிட,

$$f(a) = 0 \times \phi(a) + R = R.$$

$\therefore$ $x-a$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாயின், $f(a)=0$; மறுதலையாக, $f(a)=0$ எனின், $(x-a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

உ–ம். $x^3 - x^2 - x + 1$ என்பதன் காரணிகளைக் காண்க.

அச்சார்பு x இன் மூன்றும் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாகும். அதனை $f(x)$ என்பதனுற் குறிக்க.

$$\therefore f(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

$\therefore$ $x-1$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி.

$$f(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

$\therefore$ $x+1$ என்பதும் $f(x)$ இன் ஒரு **காரணி.**

$\therefore$ $(x-1)(x+1)$ என்பது ஒரு காரணி.

இக்காரணி இரண்டாம் படியில் உள்ளது.

ஆகவே, அச்சார்பிற்கு x இன் முதலாம் படியிலுள்ள வேறொரு காரணியும் இருத்தல் வேண்டும். a, b என்பது x ஐச் சாராவாயின், அது $ax+b$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

$$f(x) \equiv (x-1)(x+1)(ax+b).$$

x ஐச் சாராத உறுப்பு இடப்பக்கத்தில் $+1$ ஆயும், வலப் பக்கத்தில் $-b$ யாயும் இருக்கின்றது.

$$\therefore \quad b = -1.$$

இரு பக்கங்களிலும் x^3 இன் குணகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$a = 1$$

$$\therefore \quad x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 \ (x+1).$$

பல மாறிகளினுடைய பல்லுறுப்பிச் சார்புகள்.

p, q என்பன நேர்முழு எண்களாய் அன்றிப் பூச்சியமாய் இருக்க, a என்பது x, y என்பனவற்றைச் சாராதிருந்தால், $a x^p y^q$ என்னும் வடிவிலுள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையாலாகும் ஒரு கோவை x, y என்னும் மாறிகளின் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாகும். உதாரணமாக, $2x^3y - 5xy + y - 2x$ என்பது x, y என்பனவற்றின் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாகும். x, y என்பனவற்றின் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பில் யாதுமோர் உறுப்பிலுள்ள x, y என்பனவற்றின் படிகளின் கூட்டுத் தொகை ஒரே யளவினதாய் n இற்குச் சமனாய் இருந்தால், அப்பல்லுறுப்பிச் சார்பு ஏகவினமானதென்றும் n என்னும் படியுள்ளதென்றுங் கூறப்படும். உதாரணமாக, $x^2y - 3xy^2 - 5y^3$ என்பது x, y என்பனவற்றில் 3 ஆம் படியிலுள்ள ஏகவினப் பல்லுறுப்பிச் சார்பெனப்படும்.

x, y என்பனவற்றிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பானது x, y என்பன ஒன்றுக் கொன்றாக மாற்றப்படும்பொழுது மாறாதிருந்தால், அது **சமச் சீரானது** எனப்படும்.

$x^2y + xy^2 + 2x + 2y$ என்பது x, y என்பனவற்றிற் சமச்சீரானது ; அதற்குக் காரணம் x என்பதை y யாலும் y என்பதை x ஆலும் இடம் பெயர்க்க முந்திய சார்போடு ஒன்றாகிய $y^2x + yx^2 + 2y + 2x$ என்னுஞ் சார்பே பெறப்படும் என்பது.

அதுபோல, மூன்று மாறிகளையாதல், மூன்றின் மேற்பட்ட மாறிகளை யாதல் கொண்ட ஏகவினச் சார்புகள் வரையறுக்கப்படலாம்.

$p + q + r$ என்பது மாறாது n இற்குச் சமனாகுமாறு, p, q, r என்பன நேர்முழு எண்களாயோ பூச்சியமாயோ இருந்தால், $a x^p y^q z^r$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையாலாகும் ஒரு கோவை x, y, z என்பனவற்றில் n என்னும் படியிலுள்ள ஏகவினப் பல்லுறுப்பிச் சார்பெனப்படும்.

x என்பது y யையும், y என்பது z ஐயும், z என்பது x ஐயும் இடம் பெயர்க்கும்பொழுது மாறாது, x, y, z என்பனவற்றிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிச்சார்பு x, y, z என்பனவற்றில் சக்கரச் சமச்சீரில் இருக்கின்றதெனப்படும்.

உதாரணங்கள் 1. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ என்பதன் பல்லுறுப்பிக் காரணிகளைக் காண்க.

$x = y$ ஆகும்பொழுது, அக்கோவை பூச்சியமாகும்.

அக்கோவை x இன் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாயிருத்தலால், $x - y$ என்பது அதன் காரணிகளுள் ஒன்று என்பது மீதித் தேற்றத்தாற் பெறப் படும்.

அதுபோல $x - y$ என்பதும் ஒரு காரணியாகும்.

$\therefore$ $(x-y)$ $(x-z)$ என்பது ஒரு காரணி.

இக்காரணி x இன் இரண்டாம் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை: தந்த கோவையும் x இல் இரண்டாம் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை. ஆகவே வேறு யாதும் காரணி x ஐச் சாராதிருத்தல் வேண்டும். தந்த கோவையில் x^2 இன் குணகம் $y - z$; $(x-y)(x-z)$ இல் x^2 இன் குணகம் 1.

$$\therefore \quad x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (y-z)(x-y)(x-z)$$
$$= -(x-y)(y-z)\ z-x)$$

2. $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ என்பதன் பல்லுறுப்பிக் காரணிகளைக் காண்க.

அக்கோவையை x இலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை எனக் கொண்டு முன்போல் $(x-y)$ $(x-z)$ என்பது ஒரு காரணி எனப் பெறுகின்றோம்.

தந்த கோவை x இலே மூன்றாம் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை ; x^3 இன் குணகம் $y - z$ ஆகும்.

ஆகவே, p என்பது y, z என்பனவற்றைச் சார்ந்தோ சாராமலோ இருந்து x ஐச் சாராதாயின், அக்கோவைக்கு $(y-z)(x+p)$ என்னும் வடிவிலுள்ள வேறொரு காரணி இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \text{ தந்த கோவை} \equiv (x-y)(y-z)(x-z)(x+p).$$

தந்த கோவை, x, y, z என்பனவற்றிலே நாலாம் படியிலுள்ள ஏகவினப் பல்லுறுப்பிக் கோவையாய் x, y, z என்பனவற்றில் சக்கரச் சமச்சீரில் உள்ளது.

அன்றியும், $(x-y)(y-z)(x-z)$ என்பது x, y, z என்பனவற்றில் சக்கரச் சமச்சீரில் உள்ளது.

$\therefore (x+p)$ என்னுங் காரணியும், x, y, z என்பனவற்றிலே சமச்சீரில் இருத்தல் வேண்டும். $p=y+z$ ஆயினுற்றுன், இந்நிபந்தனை தீர்க்கப்படும்.

$$\therefore \quad x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$$
$$\equiv -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

3. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ **என்பதன் பல்லுறுப்பிக் காரணிகளைக் காண்க.**

$x=-(y+z)$ எனின், அக்கோவை

$-(y+z)^3+y^3+z^3+3yz(y+z)=0$ ஆகும்.

$\therefore x+y+z$ என்பது ஒரு காரணி.

தந்த கோவை x, y, z என்பனவற்றிலே மூன்றும் படியிலுள்ள ஏகவினச் சக்கரச் சமச்சீர்ப் பல்லுறுப்பிக் கோவை.

$x+y+z$ என்னுங் காரணியும் x, y, z என்பனவற்றிலே முதலாம் படியிலுள்ள ஏகவினச் சக்கரச் சமச்சீர்ப் பல்லுறுப்பிக் கோவை.

ஆகவே, x, y, z என்பனவற்றில் ஏகவினச் சக்கரச் சமச்சீர்க் காரணி வேறொன்று இருத்தல் வேண்டும்; இக்காரணி இரண்டாம் படியில் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, அது

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)$$

என்னும் வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)].$$

x^3 இனுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த

$A=1$ எனவும்

x^2y யினுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த

$A+B=0$ எனவும் பெறப்படும்.

$\therefore B=-1.$

$$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

A, B என்பனவற்றைத் துணிதற்கு ஒத்த குணகங்களைச் சமன்படுத்தற்குப் பதிலாக, பின்வருமாறுஞ் செய்யலாம்.

x, y, z என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அவ்விரு கோவைகளுஞ் சமனுகும்.

$x=1,\ y=1\ z=0$ என்றுபிரதியிட
$2=2\ [2A+B]$ அதாவது $2A+B=1.$
$x=1, y=0, z=0$ எனப் பிரதியிட
$1=A.$

$\therefore \quad B=-1$

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\tfrac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

ஒவ்வொரு வர்க்கமும் பூச்சியமாயினுற்றுன் மூன்று வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகலாம்.

$\therefore x=y=z$ ஆயினுற்றுன், $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ என்பது பூச்சியமாகும்; வேறு நிபந்தனைகளில் அது நேராகும்.

$\therefore \quad x+y+z>0$ எனின், $x^3+y^3+z^3>3xyz.$

$x+y+z<0$ எனின், $x^3+y^3+z^3<3xyz.$

பயிற்சி 25.

1. பின்வருவனவற்றினுடைய காரணிகளைக் காண்க:

(i) $x^3+5x^2+8x+4.$
(ii) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$
(iii) $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$
(iv) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$
(v) $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3.$
(vi) $x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2).$

2. $f(x)$ என்பது இரண்டாம் படியிலோ அதன் மேற்பட்ட படியிலோ உள்ள x இன் ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாயிருக்க, a, b என்பன சமனில்லாத எண்களாயின், $f(x)$ என்பது $(x-a)(x-b)$ என்பதால் வகுக்கப்படும்போது பெறப்படும் மீதி

$$f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}$$ என்பது எனக் காட்டுக.

முழுவெண்கள் 9 ஆலோ 11 ஆலோ வகுபடுதன்மை.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணெனின், x^n-a^n என்பது x இல் n என்னும் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை ஆகும்; $x=a$ ஆகும்பொழுது அது பூச்சியமாகும்.

$\therefore x-a$ என்பது x^n-a^n இன் ஒரு காரணியாகும்.

அதாவது, $(x-a)\phi(x)=x^n-a^n$ ஆகுமாறு $n-1$ என்னும் படியிலுள்ள $\phi(x)$ என்னும் ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை உண்டு.

$\phi(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$ என்பதைச் சோதித்துச் சரியெனக் காண்பது எளிது.

$a=1$ எனக் கொள்க.

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1),$$

x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் இது உண்மையாகும்.

$x=10$ எனப் பிரதியிட, n இனுடைய நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் 10^n-1 என்பது $10-1$ அதாவது 9 ஆல் என்றும் வகுபடும் எனக் காண்கின்றேம்.

இனி, n என்பது ஓர் ஒற்றை நேர் முழுவெண்ணுயின், $x=-a$ ஆகும் பொழுது x^n+a^n என்பது பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ $x+a$ என்பது x^n+a^n என்பதன் ஒரு காரணியாகும் ;

மற்றைக் காரணி $x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$ என்பது.

$a=1$, $x=10$ என எடுக்க, 10^n+1 என்னும் முழுவெண் n இனுடைய ஒற்றை நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $10+1$ அதாவது 11 ஆல் வகுபடுமெனக் காண்கின்றேம்.

n என்பது ஓர் இரட்டை நேர் முழுவெண்ணெனின், $x=-a$ ஆகும் பொழுது x^n-a^n என்பது பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ $x+a$ என்பது x^n-a^n என்பதன் ஒரு காரணியாகும் ; மற்றைக் காரணி $x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots-a^{n-1}$ என்பது.

$a=1$, $x=10$ என எடுக்க 10^n-1 என்னும் முழுவெண் n இனுடைய இரட்டை நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $10+1$ அதாவது 11 ஆல் வகுபடுமெனக் காண்கின்றேம்.

ஒரு நேர் முழுவெண்ணினுடைய இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 9 ஆல் வகுபடு மெனின், அவ்வெண் 9 ஆல் வகுபடும்.

அலகின் இடத்திலிருந்து ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட அம்முழுவெண்ணி னுடைய இலக்கங்கள், a, b, c, d, . . ., என்பன ஆகுக.

N என்பது அம்முழுவெண்ணுயின்,

$$N=a+10b+10^2c+10^3d+\ldots.$$

S என்பது அவ்விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாயின்,

$$S=a+b+c+d+\ldots.$$

$\therefore$ $N-S=(10-1)b+(10^2-1)c+(10^3-1)d+\ldots.$

$\therefore$ $N-S$ என்பது $10-1$ ஆல் அதாவது 9 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore$ N என்பது 9 ஆல் வகுபடுமெனின், S என்பதும் 9 ஆல் வகுபடும்;

S என்பது 9 ஆல் வகுபடுமெனின் N என்பதும் 9 ஆல் வகுபடும்.

வேறு வகையாகச் சொல்லப்புகின், N என்பது 9 ஆல் வகுபடுதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையானது S என்பது 9 ஆல் வகுபடவேண்டும் என்பதே.

ஒரு நேர் முழுவெண்ணில், ஒற்றையிடங்களிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் இரட்டையிடங்களிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு முள்ள வித்தியாசம் 11 ஆல் வகுபடுமெனின், அவ்வெண் 11 ஆல் வகுபடும்.

முன்போல, $N=a+10b+10^2c+10^3d\ldots$

D என்பது மேற்கூறிய வித்தியாசமாயின்

$$D=a-b+c-d+\ldots \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $N-D=(10+1)b+(10^2-1)c+(10^3+1)d+\ldots.$

$\therefore$ $N-D$ என்பது $10+1$ அதாவது 11 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore$ N என்பது 11 ஆல் வகுபடுதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை D யானது 11 ஆல் வகுபடவேண்டும் என்பதே.

x இல் n என்னும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை வேறுவேறுன x இனுடைய n பெறுமானங்களுக்கன்றி அதனினும் மேற்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாகாது.

அப்பல்லுறுப்பிக் கோவை

$$a_0x^n+ax^{n-1}+\ldots+a_n \text{ ஆகுக.}$$

இங்கு $a_0\neq 0$.

x இனுடைய $a_1, a_2, \ldots a_n$ என்னும் வேறு வேறுன n பெறுமானங் களுக்கு அது பூச்சியமாகின்றதெனக் கொள்க.

ஆயின், $(x-a_1), (x-a_2)\ldots, (x-a_n)$ என்பன அப்பல்லுறுப்பிக் கோவை யினுடைய காரணிகளாகும்.

$\therefore$ அவற்றின் பெருக்கம் $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ என்பது ஒரு காரணி யாகும். இப்பெருக்கமே x இல் n என்னும் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப் பிக் கோவையாயிருத்தலால், ஆரம்பத்திலே தந்த பல்லுறுப்பிக் கோவையின் வேறு யாதுங் காரணி x ஐச் சாராது இருத்தல் வேண்டும்.

x^n இனுடைய குணகங்களை ஒப்பிட,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv a_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

$\therefore$ $a_0\neq 0$ ஆயிருத்தலால், வலப்பக்கத்திலுள்ள கோவை $a_1, a_2, \ldots a^n$ என்பனவல்லாத x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கும் பூச்சியமாகாது.

$\therefore$ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ என்னும் பல்லுறுப்பிக் கோவை வேறு வேறுன x இனுடைய n பெறுமானங்களுக்கன்றி அதனினும் மேற்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாகாது.

ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கும் பூச்சியமாகாதிருக்கலாம். அது x இனுடைய குறிக்கப்பட்ட பெறுமானங் களுக்கு பூச்சியமாகுமெனின், x இனுடைய அத்தகைப் பெறுமானங்களி னுடைய தொகை அப்பல்லுறுப்பிக் கோவையின் படியைக் குறிக்கும் முழு வெண்ணை அதிகரிக்காதென்றே நிறுவியுள்ளோம்.

x இல் n என்னும் படியுள்ள இரண்டு பல்லுறுப்பிக் கோவைகள் x இனு டைய வேறுவேறுன n பெறுமானங்களுக்கு மேலாக ஒன்றுக்கொன்று சமனுயின், அக் கோவைகள் சர்வசமனுதல் வேண்டும்.

அவ்விரண்டு பல்லுறுப்பிக் கோவைகள்

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$
$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n \text{ என்பன ஆகுக.}$$
$$f(x)\equiv(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_n-b_n)$$

என்னும் பல்லுறுப்பிக் கோவையை ஆராய்க.

$a_o - b_o \neq 0$ எனின், இப்பல்லுறுப்பிக் கோவை x இனுடைய வேறு வேறான n பெறுமானங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாகாது.

ஆகவே, தந்த இரு பல்லுறுப்பிக் கோவைகளும் x இனுடைய வேறு வேறான n பெறுமானங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகைக்கு ஒன்றுக்கொன்று சமனாயின், $a_o - b_o = 0$.

ஆயின், $f(x)$ என்பது $(a_1 - b_1)\ x^{n-1} + \ldots (a_n - b_n)$ என்பதாக ஒடுங்கும். $a_1 - b_1 \neq 0$ எனின் இப்பல்லுறுப்பிக் கோவை x இனுடைய வேறு வேறான $(n-1)$ பெறுமானங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாகாது.

$\therefore\ a_1 - b_1 = 0$

அதுபோல, $a_2 - b_2 = 0$; இவ்வாறே பிறவும்.

ஈற்றில் $a_n - b_n = 0$.

$\therefore$ தந்த இரு பல்லுறுப்பிக் கோவைகள் ஒன்றுக்கொன்று சர்வசமன்.

உ – ம். a, b, c என்பன சமனிலிகளாயின்,

$$\frac{a^2(x-b)\ (x-c)}{(a-b)\ (a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)\ (c-b)} = x^2$$

எனக் காட்டுக.

வலப்பக்கத்தில் உள்ள கோவை x இல் 2 ஆம் படியையுடைய ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை ; அவ்வாறே இடப்பக்கத்திலுள்ள கோவையும்,

$x = a$ யாகும்பொழுது, ஒவ்வொன்றும், a^2 இற்கு ஒடுங்கும் ;
$x = b$ யாகும்பொழுது, ஒவ்வொன்றும், b^2 இற்கு ஒடுங்கும் ;
$x = c$ ஆகும்பொழுது, ஒவ்வொன்றும் c^2 இற்கு ஒடுங்கும்.

அதாவது, அப்பல்லுறுப்பிக் கோவைகள் x இனுடைய வேறு வேறான இரு பெறுமானங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகைக்குச் சமன்.

$\therefore$ அவை சர்வசமனாதல் வேண்டும்.

இருபடிச் சமன்பாடு.

$a \neq 0$ ஆக, $ax^2 + bx + c$ என்பது x இல் இரண்டாம் படியையுடைய ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவையாகுக.

இப்பல்லுறுப்பிக் கோவை x இனுடைய குறிக்கப்பட்ட பெறுமானங்களுக்குப் பூச்சியமாகலாம், அன்றிப் பூச்சியமாகாது விடலாம். அப்பல்லுறுப்பிக் கோவை பூச்சியமாகின்ற x இனுடைய பெறுமானம் யாதேனும் உண்டெனில் அது $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் x இனுடைய பெறுமானங்கள் உண்டெனின், அச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களானவை மெய்யானவை எனக் கூறுவோம். அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் x இன் பெறுமானம் யாதொன்றும் இல்லையெனின், அச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் கற்பனையானவை எனக் கூறுவோம்.

அச்சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் உண்டோ எனத் துணிதற்கு **நிறை வர்க்கமாக்கல்** என்னும் முறையை வழங்குவோம்.

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}[a^2x^2 + abx + ca]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4}\right]$$

$$\therefore\ \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$ ஆகும்பொழுது $ax^2 + bx + c = 0$.

வகை I. $b^2 - 4ac > 0$ ஆகுக. $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ என்பது $b^2 - 4ac$ என்பதனுடைய நேர் வர்க்கமூலத்தைக் குறித்தால், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் x இனுடைய பெறுமானங்கள் உண்டு ; அவை

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2},$$

அதாவது,
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a},$$

என்பதாலே தரப்படும்.

இவ்வண்ணம் $b^2 - 4ac > 0$ ஆகும்பொழுது,

$$\frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a},\quad \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

என்னும் இரண்டு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

சிறப்பாக, a, c என்பனவற்றிற்கு இரு முரண் குறிகள் இருந்தால் அச்சமன்பாட்டிற்கு இரு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

வகை II. $b^2 - 4ac = 0$ ஆகுக.

ஆயின், அச்சமன்பாடு,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = 0,$$

அதாவது,
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$ என்பதாகும்.

இச்சமன்பாடு

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0.$$

என எழுதப்படலாமாதலின், அச்சமன்பாட்டிற்கு ஒவ்வொன்றும் $-\dfrac{b}{2a}$ இற்குச் சமனான இரு பொருந்து மூலங்கள் உண்டு எனப்படும்.

வகை III. $b^2-4ac<0$ ஆகுக.

ஆயின், ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் மறைக் குறியோடு பொருந்தாதாதலால், $\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4}$ என்னுஞ் சமன்பாடு x இன் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்குத் தீர்க்கப்படாது.

ஆகவே, $b^2-4ac<0$ ஆகும்பொழுது அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் யாதுமில்லை.

அச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களினது தன்மையைப் பற்றி வேறு பிரித்து அறிதற்குத் துணைசெய்யும் b^2-4ac என்னுங் கணியம் **தன்மை காட்டி** எனப்படும்.

மூலங்களுக்குங் குணகங்களுக்குமுள்ள தொடர்புகள்.

$ax^2+bx+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான அல்லது பொருந்துகின்ற α, β என்னும் மெய் மூலங்கள் இருக்க.

$x=\alpha$ ஆகும்பொழுதும் $x=\beta$ ஆகும்பொழுதும் ax^2+bx+c என்னும் பல்லுறுப்பிக் கோவை பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ $(x-\alpha)(x-\beta)$ என்பது அப்பல்லுறுப்பிக் கோவையின் ஒரு காரணியாகும்.

$$\therefore\ ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta.)$$

இருகோவைகளிலும் x இனுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$b=a(-\alpha-\beta).$$

மாறுத உறுப்புக்களைச் சமன்படுத்த,

$$c=a\alpha\beta.$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{x\text{ இன் குணகம்}}{x^2\text{ இன் குணகம்}}.$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{மாறுவுறுப்பு}}{x^2\text{ இன் குணகம்}}.$$

உதாரணங்கள்.

(1). α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களாயின், a, b, c என்பனவற்றில்,

(i) $\alpha^2+\beta^2$,

(ii) $\alpha^3+\beta^3$ ஐக் காண்க.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}.$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$=(\alpha+\beta)([\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$$
$$=-\frac{b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right].$$

(2)α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களாயிருக்க, $\alpha+1$, $\beta+1$ என்பன பூச்சியமல்லவெனின், $\frac{1}{\alpha+1}$, $\frac{1}{\beta+1}$ என்பனவற்றை மூலங்களாக உள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வேண்டிய சமன்பாடு $x^2+px+q=0$ ஆயின்,

$$-p=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}\text{ ஆயும்,}$$

$$q=\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\beta+1}\text{ ஆயுமிருக்கும்.}$$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{-\frac{b}{a}+2}{\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1}$$
$$=\frac{-b+2a}{c-b+a}$$

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{a}{c-b+a}.$$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு,

$$(c-b+a)x^2+(b-2a)x+a=0\text{ என்பது.}$$

வேறொருவழி பின்வருமாறு :—

x என்பதை மாறியாக வழங்குவதற்குப் பதிலாக, அம்மாறியைக் குறிப்பதற்கு வேறு யாதும் எழுத்தை வழங்கலாம். $x=\alpha$ ஆகும்பொழுதும் $x=\beta$ ஆகும்பொழுதும் $ax^2+bx+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தீர்க்கப்படுமாயின், $y=\alpha$ ஆகும்பொழுதும் $y=\beta$ ஆகும் பொழுதும் $ay^2+by+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தீர்க்கப்படும்.

$y = \dfrac{1}{x+1}$ எனப் பிரதியிடுகின்றோமெனக் கொள்க.

ஆயின், $x = \alpha$ ஆகும்பொழுது, $y = \dfrac{1}{\alpha+1}$; $x = \beta$ ஆகும்பொழுது $y = \dfrac{1}{\beta+1}$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + b\left(\frac{1}{y} - 1\right) + c$$

$$= \frac{y^2(c-b+a) + y(b-2a) + a}{y^2}$$

$\therefore$ $x = \alpha$ ஆக, அல்லது β ஆக இருக்கும்பொழுது $ax^2 + bx + c$ என்பது பூச்சியமாகுமெனின், $y = \dfrac{1}{\alpha+1}$ ஆகவோ $\dfrac{1}{\beta+1}$ ஆகவோ இருக்கும் பொழுது $y^2(c-b+a) + y(b-2a) + a$ என்பது பூச்சியமாகும். y என்பது மாறியாயின், $\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$ என்பனவற்றை மூலங்களாக உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு

$$y^2(c-b+a) + y(b-2a) + a = 0 \text{ என்பது.}$$

(3) a, h, b, l, m, l', m' என்பன x, y என்பனவற்றைச் சாராமலிருக்க $h^2 \geq ab$ எனின், $ax^2 + 2hxy + by^2$ என்பது $(lx+my)(l'x+m'y)$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$2hxy + by^2 = y(2hx + by)$ ஆதலால், a என்பது பூச்சியமெனின் முடிபு வெளிப்படை.

a என்பது பூச்சியமன்றெனின்,

$$ax^2 + 2bxy + by^2 = \frac{1}{a}(a^2x^2 + 2ahxy + aby^2)$$

$$= \frac{1}{a}[(ax+hy)^2 - (h^2-ab)y^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(ax+hy)^2 - p^2y^2], \text{ இங்கு } p = \sqrt{(h^2-ab)}$$

$$= \frac{1}{a}(ax+hy+py)(ax+hy-py)$$

$$= (lx+my)(l'x+m'y).$$

பயிற்சி 26.

1. a, b, c என்பன தரப்பட்ட எண்களாயின்,
$(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் உண்டெனக் காட்டுக ; a, b, c என்னும் எண்களுள் இரண்டாயினுஞ் சமனிலிகளாயின் அம்மூலங்கள் வேறு வேறனவை என்றுங் காட்டுக.

2. x இன் பூச்சியமல்லாத எப்பெறுமானத்திற்கும் $x + \dfrac{1}{x}$ என்பது $-2, 2$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் யாதும் ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காதெனக் காட்டுக.

3. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களாயின் α^2, β^2 என்பனவற்றை மூலங்களாகவுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $x^2 - bx + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இருக்க $c+1>b>2$ ஆயின் ஒவ்வொரு மூலமும் 1 இலும் பெரிதாகுமெனக் காட்டுக.

5. $a \neq p$ ஆக, $x^2 + 2ax + b = 0$,
$x^2 + 2px + q = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் உண்டெனின் அதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
$(q-b)^2 = 4(p-a)(aq-bp)$ என்றுங் காட்டுக.

6. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இருந்தால்
(i) இரு மூலங்களும் நேராகுமாறு,
(ii) இரு மூலங்களும் எதிராகுமாறு,
(iii) ஒரு மூலம் நேராயும் மற்றையது மறையாயுமிருக்குமாறு,
(iv) ஒரு மூலம் பூச்சியமாயும் மற்றையது பூச்சியமல்லாததாயுமிருக்குமாறு,
(v) இரு மூலங்களும் பூச்சியமாகுமாறு,
மட்டாகப் போதுமான நிபந்தனைகளைக் காண்க.

7. $x^2 + ax + b = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றையதன் வர்க்கமெனின்
$a^3 - 3ab + b + b^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

8. $x + \dfrac{1}{x} = t$ எனப் பிரதியிடுதலால்
$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

9. a, b, h என்பன பூச்சியமல்லாதனவாயும் $h^2 - ab \geq 0$ ஆயும் இருந்தால், $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு x, y என்பனவற்றின் பூச்சியமல்லாத பெறுமானத்தாலே தீர்க்கப்படும் எனக் காட்டுக. $h^2 - ab > 0$ ஆயும் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்பன $y_1x_2 - y_2x_1$ என்பது பூச்சியமாகாதவாறு அச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் x,y என்பனவற்றின் பெறுமானங்களின் இரு தொகுதிகளாயும் இருந்தால்
$b(x_1y_2 + x_2y_1) = -2hx_1x_2$ என்றும்,
$by_1y_2 = ax_1x_2$ என்றுங் காட்டுக.

10. $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + cx + b = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாடுகள் சர்வசமனில்லாதிருக்க அவற்றிற்கு ஒரு பொது மூலம் உண்டெனின் $a + b + c = 0$ எனக் காட்டுக.
அவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஏனை மூலங்களாலே தீர்க்கப்படும் இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க

11. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களாயிருக்க $S_r = \alpha^r + \beta^r$ எனின்
$aS_r + bS_{r-1} + cS_{r-2} = 0$ எனக் காட்டுக.
$\alpha^4 + \beta^4$ என்பதன் பெறுமானத்தை a, b, c என்பனவற்றிற் கணிக்க.

குறித்த சில ஒருங்கமை சமன்பாடுகளினுடைய தீர்வுகள்

1. $l, m, n, a, b, c, h, f, g$ என்பன தந்த எண்களாயிருக்க

$$lx + my + n = 0,$$
$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளை ஆராய்க. இச்சமன்பாடுகள் இரண்டையும் தீர்க்கும் x, y என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காணல் இயலக்கூடியதாகலாம் அல்லது இயலாததாகலாம். m என்பது பூச்சியமன்றெனின், முதலாம் சமன்பாடு,

$$y = -\frac{lx+n}{m} \text{ என எழுதப்படலாம்.}$$

இரண்டாஞ் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட

$$ax^2 - 2hx\left(\frac{lx+n}{m}\right) + \frac{b(lx+n)^2}{m^2} + 2gx - \frac{2f(lx+n)}{m} + c = 0.$$

பொதுவாக, இது x இலுள்ள ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. இச்சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லையெனின், அந்தந்தச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் இயலாது.

x இலுள்ள அவ்விரு சமன்பாட்டிற்கு x_1, x_2 என்னும்மெய் மூலங்கள் உண்டெனின், y யினுடைய ஒத்த பெறுமானங்கள் $y = -\frac{lx+n}{m}$ என்பதிற் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படும்.

x_1, x_2 என்னும் அம்மூலங்கள் பொருந்தாவாயின், அந்தந்த ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு இரு தீர்வுத் தொகுதிகளைப் பெறுவோம். x_1, x_2 என்பன பொருந்துமாயின், ஒரு தீர்வுத் தொகுதியையே பெறுவோம்.

x இலுள்ள மேற்றந்த இருபடிச் சமன்பாட்டில், x^2 இன் குணகம் $(am^2 - 2hlm + bl^2)$ ஆகும். $am^2 - 2hlm + bl^2 = 0$ ஆயின், அச்சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடன்று ; x இன் குணகம் பூச்சியமன்றெனின் இச்சமன்பாடு x இற்கு ஒரு பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும் ; கொடுக்க தந்த ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வுத் தொகுதியே இருக்கும். x இன் குணகமும் பூச்சியமெனின் தந்த சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு யாதும் இராது.

m என்பது பூச்சியமெனின், l என்பது பூச்சியமாகும் வகையை ஆராய்தல் இயலாது. l என்பது பூச்சியம் அன்றெனின், முதலாஞ் சமன்பாட்டிலிருந்து x என்பதை y யில் உணர்த்தி அதற்கு ஒத்த ஒரு வழியாலே ஆராயப்புகலாம்.

உ ம்.I. $x + 2y - 5 = 0,$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$x = 5 - 2y.$

$\therefore \quad (5-2y)^2 + y^2 - 2(5-2y) - 4y = 0,$

$\therefore \quad y^2 - 4y + 3 = 0,$

$\therefore \quad y = 1$ அல்லது $3,$

$\therefore \quad x = 3$ அல்லது $-1.$

$\therefore$ பின்வரும் இரு தீர்வுத் தொகுதிகளைப் பெறுவோம்

(i) $x = 3, y = 1.$ (ii) $x = -1, y = 3.$

II. $a, h, b, c, a', h', b', c'$, என்பன தந்த எண்களாக,

$$ax^2 + 2h\,xy + by^2 = c,$$
$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = c',$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளை ஆராய்க.

அவ்விரு சமன்பாடுகளிலுமிருந்து

$$c'(ax^2 + 2hxy + by^2) = c(a'x^2 + 2h'xy + b'y^2) \;;$$

அதாவது $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0$;

இங்கு $A = ac' - a'c,\ H = hc' - h'c,\ B = bc' - b'c.$

$H^2 \geq AB$ எனின், இச்சமன்பாடு,

$(lx + my)(l'x + m'y) = 0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

$lx + my = 0,\ l'x + m'y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுள் யாதுமொன்றைத் தீர்க்கும் x, y என்பனவற்றின் பெறுமானங்களால் இச்சமன்பாடு தீர்க்கப்படலாம்.

t யின் பெறுமானம் எதுவாயிருந்தாலும் $x = mt$ ஆயும், $y = -lt$ ஆயும் இருக்கும்பொழுது $lx + my = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தீர்க்கப்படும். தந்த இரு சமன்பாடுகளுள் யாதுமொன்றிலே பிரதியிட்டால், t யினுடைய இரு பெறுமானங்களைப் பெறுவோம்.

$l'x + m'y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்தலால் இவ்வண்ணந் தந்த சமன்பாடுகளுக்கு இரு தீர்வுத் தொகுதிகள் பெறப்படலாம்.

$H^2 < AB$ எனின், அந்தந்தச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் x, y என்பனவற்றின் பெறுமானம் யாதொன்று மிராது.

உ - ம். $x^2 + xy + y^2 = 3,$

$2x^2 - 2xy + 5y^2 = 5,$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$5(x^2+xy+y^2)=3(2x^2-2xy+5y^2).$$

$$\therefore\ x^2-11xy+10y^2=0.$$

$$\therefore\ (x-10y)(x-y)=0.$$

$\therefore\ x-10y=0$, அல்லது $x-y=0$.

$x-y=0$ எனின், $x=t,\ y=t$ என எழுதலாம்.

முதலாஞ் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட ,

$t^2=1$, அதாவது $t=\pm 1$.

$\therefore$ $(x=1,\ \ y=1)$ என்பதும் $(x=-1,\ \ y=-1)$ என்பதும் இரு தீர்வுத் தொகுதிகள்.

$x-10y=0$ எனின், $x=10k,\ y=k$ என எழுதலாம்.

$$\therefore\ (10k)^2+10k^2+k^2=3$$

$$\therefore\ k=\pm 1/\sqrt{37}$$

$\therefore$ வேறு இரண்டு தீர்வுத் தொகுதிகள்,

$x=10/\sqrt{37},\ y=1/\sqrt{37}$ என்பதும்

$x=-10/\sqrt{37},\ y=-1/\sqrt{37}$ என்பதும்

பயிற்சி 27.

1. $x^2+2xy+2y^2=1,$
$3x^2+xy+y^2=3,$
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

2. $x^2+3x+2y=0,$
$y^2+3y+2x=0,$
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

3. $(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}=\dfrac{17}{4},$
$2x+3y=1,$
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

4. $x^2+y^2-2x+3y-3=0,$
$x^2+y^2+3x-2y-3=0$
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

5. $2x^2+3y^2-xy-x-y-2=0,$
$5x^2+2y^2-3xy-x-y-2=0$
என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

அத்தியாயம் 2

இருபடிச் சார்பின் மாறல்

$a,\ b,\ c$ என்பன தந்த மாறிலிகளாக இருக்கும்பொழுது அவற்றுள் a என்பது பூச்சியமன்றெனின், ax^2+bx+c என்பது x என்னும் மாறியின் ஓர் **இருபடிச் சார்பு** எனப்படும்.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

x இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0;$

இங்கு $x=-\dfrac{b}{2a}$ ஆகும்பொழுது சமனுகுந் தன்மை உண்மையாகும்.

$b^2-4ac<0$ ஆகுக.

ஆயின், எல்லா x இற்கும் $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}>0.$

$\therefore$ ax^2+bx+c என்பது ஒருபோதும் பூச்சியமாகாது ; அதன் குறி x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் a யின் குறியோடு ஒன்றுகும்.

$b^2-4ac=0$ ஆகுக.

ஆயின், $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

$\therefore$ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ஆகும்பொழுது, ax^2+bx+c என்பது பூச்சியமாகும் ; அதன் குறி x இனுடைய பிற பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் a யின் குறியோடு ஒன்றுகும்.

$b^2-4ac>0$ ஆகுக.

ஆயின், $ax^2+bx+c=a\,(X^2-p^2)=a\,(X-p)(X+p),$

இங்கு $X=x+\dfrac{b}{2a},\ p=\sqrt{\{(b^2-4ac)/4a^2\}}$

$\therefore$ $\alpha,\ \beta$ என்பன $a,\ b,\ c$ என்பனவற்றைச் சார்ந்த வேறுவேறன எண்களாயின், ax^2+bx+c என்பது $a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாம்.

x இற்கு α,β என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கின்ற யாதுமொரு பெறுமானம் இருந்தால், $x-\alpha,\ x-\beta$ என்னுங் காரணிகளுள் ஒன்று நேராயும் மற்றையது மறையாயும் இருக்கும்.

$\therefore$ x என்பது α விற்கும் β விற்கும் இடையிற் கிடந்தால், ax^2+bx+c என்பதற்கு a யின் குறியோடு முரணுய குறி இருக்கும்.

x என்பது α,β என்னும் இரண்டினுஞ் சிறிதாயின், அவ்வாறன்றி அவை இரண்டிலும் பெரிதாயின்,

$x-\alpha, x-\beta$ என்னுங் காரணிகளுக்கு ஒரே குறி இருக்கும்.

$\therefore$ x என்பது α,β என்றும் இரண்டினுஞ் சிறிதாயிருந்தாலும், அன்றி அவை இரண்டிலும் பெரிதாயிருந்தாலும், ax^2+bx+c என்பதற்கு a யிற்குள்ள குறியே இருக்கும்.

$x=\alpha$ அல்லது β ஆயின், $ax^2+bx+c=0$.

இவ்வண்ணம், $b^2-4ac>0$ ஆயினுற்றுன், x மாற ax^2+bx+c என்னுஞ் சார்பு தன் குறியை மாற்றக்கூடும் எனக் காண்கின்றேம்.

இருபடிச் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களின் நிலையைக் குறித்தல்.

$b^2-4ac>0$ ஆயினுற்றுன், $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறுன இரண்டு மெய் மூலங்கள் இருக்கும். $b^2-4ac>0$ ஆயினுற்றுன், x மாற ax^2+bx+c என்னுஞ் சார்பு தன் குறியை மாற்றும் என்றுங் கண்டுள்ளோம். ஆகவே, ax^2+bx+c என்னுஞ் சார்பிற்கு x இன் யாதோ ஒரு பெறுமானத்திற்கு (p என்க) ஒரு நேர்ப் பெறுமானமும், x இன் யாதோ ஒரு பெறுமானத்திற்கு (q என்க) ஒரு மறைப் பெறுமானமும் இருந்தால் $ax^2+bx+c=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறுன இரு மெய் மூலங்கள் இருக்கும். α,β என்பன இம்மூலங்களாயின், ax^2+bx+c என்பது $a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்பதனேடு சர்வசமனுகும். α விற்கும் β விற்கும் இடையிலுள்ள x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு, ax^2+bx+c என்பதற்கு ஒரே குறி இருக்கும்; α, β என்னும் இரண்டிலும் பெரிதாகிய அல்லது அவை இரண்டிலும் சிறிதாகிய x இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ax^2+bx+c என்பதற்கு மறைக் குறி இருக்கும். ஆகவே, α, β என்னும் எண்களுள் ஒன்று மாத்திரம் p, q என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1. a, b, c என்பன எல்லாம் வேறுவேறுயின், $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறுன இரண்டு மெய்மூலங்கள் இருக்குமெனக் காட்டுக; a, b, c என்பனபற்றி இம் மூலங்களினுடைய நிலைகளைத் துணிக.

$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ ஆகுக.

$f(x)$ என்பது x இன் ஓர் இருபடிச் சார்பு.

a,b,c என்னும் எண்களுள் a என்பது மிகப் பெரிதாயும் c என்பது மிகச் சிறியதாயுமிருக்க,.

$$f(c)=(c-a)(c-b)>0,$$
$$f(b)=(b-c)(b-a)<0.$$

ஆகவே, $f(x)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் வேறுவேறுன மெய்மூலங்களாகும்; இம்மூலங்களுள் ஒன்றே c, b என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தல் வேண்டும்.

இனி, $f(a)=(a-b)(a-c)>0$.

ஆகவே, மற்றைமூலம் a யிற்கும் b யிற்கும் இடையிற் கிடத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 2. a,b,p,q என்பன தரப்பட்ட எண்களாக p என்பது q விற்குச் சமனில்லை எனின்,

$$\frac{a^2}{p-x}+\frac{b^2}{q-x}=-1$$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறுன மெய்மூலங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

அச்சமன்பாடு $a^2(q-x)+b^2(p-x)+(p-x)(q-x)=0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

$f(x)$ என்பது இடப்பக்கத்திலுள்ள x இன் இருபடிச் சார்பைக் குறிக்க.

$$f(p)=a^2(q-p),$$
$$f(q)=b^2(p-q).$$

$\therefore$ $f(p), f(q)$ என்பனவற்றிற்கு எதிர்க் குறிகள் உண்டு.

ஆகவே, $f(x)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறுன மெய்மூலங்கள் உண்டு; அவற்றுள் ஒன்றே p யிற்கும் q விற்கும் இடையிற் கிடத்தல் வேண்டும்.

மற்றை மூலத்தினது நிலையைத் துணிதற்கு $f(x)$ என்பது x^2+Ax+B என்னும் வடிவத்தில் இருப்பதைக் காண்கின்றேம். x என்பது பூச்சியமன்றெனின், $x^2+Ax+B=x^2\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)$

x இன் எண்பெறுமானம் மிகப் பெரிதாயிருக்கும்பொழுது

$1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$ என்பது மிக்க அண்ணளவாக, 1 ஆகும். ஆகவே, x இன் எண்பெறுமானம் மிகப்பெரிதாயிருக்கும் பொழுது,

x^2+Ax+B என்பது நேராயும் மிகப் பெரிதாயும் இருக்கும்.

$p>q$ எனக் கொள்க.

ஆயின், $f(p)=a^2(q-p)<0$.

K என்பது ஒரு மிகப்பெரிய நேர்க் கணியமெனின்,

$$f(K)>0.$$

$\therefore$ மற்றை மூலம் p யினும் பெரிது.

பயிற்சி 27

1. a, b, c என்பன தந்த எண்களாக அவற்றுள் $c>1$ எனின் $x^2+x+1-c(x-a)$ $x-b)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான இரண்டு மெய்மூலங்கள் இருக்குமென்றும், a, b என்பன இம் மூலங்களுக்கு இடையிற் கிடக்கும் என்றுங் காட்டுக.

2. $a>b>c$ ஆக p, q, r என்பன பூச்சியமல்லாத மூன்று எண்களாயிருக்க அவற்றுள் q என்பதற்கு p, r என்பனவற்றுள் ஒன்றிற்காயினும் உள்ள அதே குறியிருக்க $a+b+c$ என்பது பூச்சியமன்றெனின்

$$p(x-b)(x-c)+q(x-c)(x-a)+r(x-a)(x-b)=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான இரண்டு மெய்மூலங்கள் உண்டென்று காட்டுக.

p, q என்பன நேராயிருக்க, r என்பது மறையாயின் அவற்றுள் ஒரு மூலம் a, b என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்குமென்றும் $p+q+r$ என்பது பூச்சியத்திலும் பெரிது அல்லது சிறிது என்பதற்கேற்ப மற்றை மூலம் c யிலுஞ் சிறிது அல்லது a யிலும் பெரிது என்றும் காட்டுக.

3. $x^2+ax+b=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு α, β என்னும் வேறுவேறான மெய்மூலங்களும் $x^2+px+q=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு γ, δ என்னும் வேறுவேறான மெய்மூலங்களும் இருக்க $\alpha>\gamma>\beta>\delta$ எனின் $2x^2+(a+p)x+b+q=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான மெய்மூலங்கள் இருக்கும் என்றும், அவற்றுள் ஒன்று α, γ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் மற்றையது β, δ என்பனவற்றிற்கு இடையிலும் இருக்குமென்றும் காட்டுக.

4. p என்பது நிலையான இரண்டு எண்களுக்கு இடையிற் கிடக்கவில்லை என்றாற்றான், $px^2-x(3p+1)+2p-1=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு x பற்றி மெய்மூலங்கள் இருக்குமெனக்காட்டுக.

5. p யின் பெறுமானம் பூச்சியமல்லாமல் யாதாயிருந்தாலும் $px^2-2x-(p+1)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு x பற்றி வேறுவேறான இரு மெய் மூலங்கள் இருக்குமெனக் காட்டுக.

6. p என்பது $\frac{1}{2}, 1$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால், k யின் பூச்சியமல்லாத எப்பெறுமானத்திற்கும் $(x-1)(x-2)k+px-1=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு x பற்றி வேறுவேறான மெய் மூலங்கள் இருக்குமெனக் காட்டுக.

7. $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)(x-8)$ என்னுங் கோவை நேராயிருக்கின்ற x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சுக்களைக் காண்க.

8. $0<a^2<b$ ஆக, λ என்பது a, b என்பனவற்றைச் சார்ந்த இரண்டு நிலையான பெறுமானங்களுக்கு இடையில் இல்லை எனின், $x^3+2ax+b+\lambda(x^2-a^2)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு, x இற்கு மெய் மூலங்களைத் தருமென்று காட்டுக.

மெய்மூலங்கள் பெறப்படும்பொழுது அவை $(-a, a)$ என இடைக்கு முற்றாய் உள்ளால் அல்லது முற்றாய் வெளியாற் கிடத்தல் வேண்டுமென்றுங் காட்டுக.

9. x, y என்னும் இருமாறிகள் $x^4-2x^2y+3y^2-5y+2=0$ என்னுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. y என்பது $\frac{1}{2}, 2$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தல் வேண்டுமென்றும் $\frac{2}{3}, 1$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் y யின் எப்பெறுமானத்திற்கும் ஒத்தனவாய் x இற்கு வேறுவேறான இரண்டு பெறுமானங்களே இருக்கும் என்றுங் காட்டுக.

10. $a+b$ என்பது $-2, 2$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்க $ab<1$ எனின், k இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2+2x+b+k(bx^2+2x+a)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

இருபடிச் சார்பின் மிகப்பெரிய பெறுமானம் அல்லது மிகச்சிறிய பெறுமானம்.

a என்பது பூச்சியமன்றாக, ax^2+bx+c என்பது x இன் ஓர் இருபடிச் சார்பாகுக.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\frac{4ac-b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$\therefore\ a>0$ எனின், $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது நேர் அல்லது பூச்சியமாகும்.

$\therefore\ a>0$ ஆகும்பொழுது x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் ax^2+bx+c என்பதன் மிகச்சிறிய பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$; x இற்கு மிகப்பெரிய பெறுமானம் எடுப்பதால் $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது விரும்பும் வண்ணம் பெரிதாக்கப்படலாம் ஆதலின், அச்சார்பிற்கு மிகப்பெரிய பெறுமானம் யாதுமில்லை.

$a<0$ எனின், $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது மறை அல்லது பூச்சியம் ஆகும்.

$\therefore\ a<0$ ஆகும்பொழுது ax^2+bx+c என்பதன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது அட்சரகணித முறைபற்றி விரும்பும் வண்ணம் மிகச்சிறிதாக்கப்படலாமாதலின், இவ்வகையில் அச்சார்பிற்கு மிகச்சிறிய பெறுமானம் இல்லை.

மிகச்சிறிய பெறுமானமோ மிகப்பெரிய பெறுமானமோ வேறொரு வழியாலும் பெறப்படலாம்.

$$y=ax^2+bx+c \quad \text{ஆகுக.}$$

$$\therefore\ ax^2+bx+c-y=0.$$

ஆகவே y யினது தந்த ஒரு பெறுமானத்திற்கு x இன் ஒத்த பெறுமானம் யாதும் இருந்தால் அது ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும். $b^2-4a(c-y)\geqslant 0$, அல்லது $4ay\geqslant 4ac-b^2$ ஆயினாற்றான் இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் மெய்யாகும்.

∴ மெய்யான x இற்கு, $a>0$ எனின், $y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$,

$$a<0 \text{ எனின், } y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

∴ $a>0$ எனின், x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் y அடையும் மிகச் சிறிய பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$a<0$ எனின், x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் y அடையும் மிகப்பெரிய பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$4ay > 4ac-b^2$ ஆகும்பொழுது, x இலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான இரண்டு மெய்மூலங்கள் இருக்கும்.

∴ $a>0$ எனின், x இனுடைய வேறுவேறான இரண்டு பெறுமானங்களுக்கு ax^2+bx+c என்பது $\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்பதிலும் பெரிதான எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

$a<0$ எனின், x இனுடைய வேறுவேறான இரண்டு பெறுமானங்களுக்கு ax^2+bx+c என்பது $\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்பதிலுஞ் சிறிதான எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

இருபடிச் சார்பின் வரைபு.

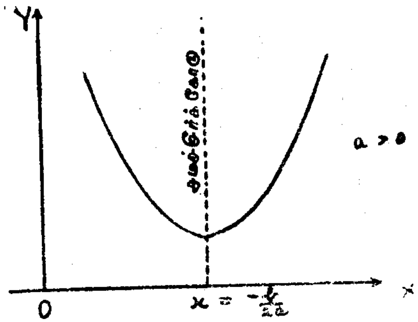
$$y = ax^2+bx+c$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ ஆகுக.}$$

∴ $x = -\frac{b}{2a}+t$ ஆயும் $x=-\frac{b}{2a}-t$ ஆயும் இருக்கும்பொழுது தந்த யாதுமொரு t இற்கு y யிற்கு ஒரே பெறுமானம் இருக்கும்.

ஆகவே, அதன் வரைபு, $x=-\frac{b}{2a}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான கோடுபற்றிச் சமச்சீராதல் வேண்டும்.

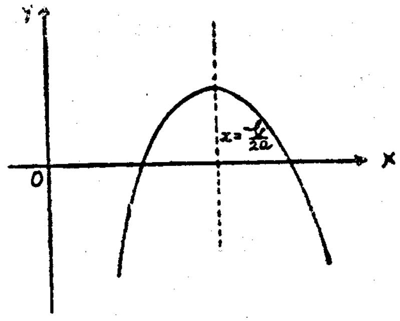
$a>0$ எனின், y என்பதற்கு $\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்னும் மிகச்சிறிய பெறுமானம் இருக்கும்.

ஆகவே, அவ்வரைபு $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்னுங் கோட்டிற்கு மேலே முழுவதும் கிடத்தல் வேண்டும். $\frac{4ac-b^2}{4a}$ யிலும் பெரிதான y யின் எப்பெறுமானத்திற்கும் x இற்கு இரு பெறுமானங்கள் இருக்கும்.



ஆகவே, x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாய் $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்னுங் கோட்டிற்கு மேலே கிடக்கும் எக்கோடும் அவ்வரைபை வேறுவேறான இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும். $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்பதற்கு ஒத்த x இனுடைய பெறுமானங்கள் பொருந்துமாதலின், $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்னுங்கோடு $x=-\frac{b}{2a}$ என்பதாலே தரப்படும் இரண்டும் பொருந்தும் புள்ளிகளில் அவ்வரைபை வெட்டும்.

இக்கோடு $x=-\frac{b}{2a}$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள அவ்வளையியினது தொடலி எனப்படும்.



$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது மிகப்பெரிதாகும்பொழுது y என்பது நேராய் மிகப் பெரிதாகும்.

அவ்வரைபின் பொது வடிவம் மேலுள்ள படத்திற் காட்டியவாறு இருக்கும்.

$b^2-4ac \geqslant 0$ எனின், அவ்வரைபு x அச்சை வேறுவேறான இரண்டு புள்ளிகளில் அல்லது இரண்டு பொருந்தும் புள்ளிகளில் வெட்டும்; $b^2-4ac<0$ எனின், அவ்வரைபு x அச்சை வெட்டாது.

$a<0$ எனின், மேலுள்ளனவற்றிற்கு ஒத்த நியாயங்கள் பொருந்தும். அவ்வரைபும் முன்போன்ற அதே வடிவினதாகும்; அவ்வளையி தலைகீழாயிருக்குமென்பதே அதன் வேறுபாடு.

$\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ என்பதனுடைய நடத்தை.

a, b, c, p, q, r என்பன தந்த எண்களாயும் a, p என்பனவற்றுள் ஒன்றாதல் பூச்சியமல்லாததாயும் இருக்க, ax^2+bx+c, px^2+qx+r என்னுஞ் சார்புகளுக்கு x என்பதே அகப்படுத்தும் ஒரு பொதுக் காரணியும் இல்லையெனின்,

$$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$$ என்னும் விகிதமுறுஞ் சார்பை ஆராய்க.

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$$ ஆகுக.

$$\therefore\ x^2(py-a)+x(qy-b)+ry-c=0.$$

px^2+qx+r என்பதைப் பூச்சியமாக்காத ஒரு பெறுமானத்தை x என்பது எடுக்கும்பொழுது y யிற்கு ஒரு தனிப் பெறுமானம் இருக்கும்.

x, y என்பனவற்றினுடைய ஒத்த பெறுமானங்கள் மேலேயுள்ள சமன்பாட்டாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

p என்பது பூச்சியமாகாமலும் $y=\dfrac{a}{p}$ யாயும் இருந்தால் x இன் ஒத்த பெறுமானம்

$$x\left(\frac{qa}{p}-b\right)+r\frac{a}{p}-c=0$$

என்னும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$\therefore\ \dfrac{qa}{p}-b$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், x இற்கு ஒரு பெறுமானத்தை மாத்திரம் பெறுவோம்.

$\dfrac{qa}{p}-b$ என்பது பூச்சியமெனின், $y=a/p$ என்பதற்கு ஒத்ததாய x இற்கு ஒரு பெறுமானமும் இல்லை. $(ax^2+bx+c)/(px^2+qx+r)$ என்பது $a/p+(c-ra/p)/(px^2+qx+r)$ என்பதற்கு ஒடுங்குகின்றமையின், இவ் வகை இங்கு ஆராயப்படவேண்டியதில்லை.

$py-a$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், x இன் ஒத்தபெறுமானம்

$$x^2(py-a)+x(qy-b)+ry-c=0$$

என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$$(qy-b)^2-4(py-a)\ (ry-c)\geq 0$$ ஆயினாற்றான்,

இச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களானவை மெய்யாகும்.

அதாவது, $A=q^2-4pr$ ஆயும், $B=-bq+2ar+2cp$ ஆயும் $C=b^2-4ac$ ஆயும் இருந்தால்,

$$Ay^2+2By+C\geq 0.$$

$y=\dfrac{a}{p}$ யாகும்பொழுது இந்நிபந்தனை தெளிவாய்த் தீர்க்கப்படும்.

ஆகவே, $Ay^2+2By+C\geq 0$ என்னும் நிபந்தனையைத் தீர்க்கும் y யின் எப்பெறுமானமும் x இன் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்கு (ax^2+bx+c) (px^2+qx+r) என்பதன் ஒரு பெறுமானமாதல் வேண்டும்; இச்சார்பு வேறொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

வகை I. $A=0$ ஆகுக; அதாவது $q^2-4pr=0$.

அதாவது, px^2+qx+r என்பது $p\left(x+\dfrac{q}{2p}\right)^2$ என்னும் வடிவினது.

அந்நிபந்தனை $2By+C\geq 0$ ஆகும்.

B என்பது பூச்சியமெனின், ax^2+bx+c என்பதற்கு $x+\dfrac{q}{2p}$ என்னும் ஒரு காரணி இருத்தல் வேண்டுமென்பது வெளிப்படை. ax^2+bx+c, px^2+qx+r என்பனவற்றிற்கு ஒரு பொதுக்காரணி உள்ளவகையை ஆராயவில்லை. B என்பது பூச்சியமல்லாததாகும்;

$$B>0 \text{ ஆக } y\geq -\frac{C}{2B}$$ ஆயினாலும்,

$$B<0 \text{ ஆக } y\leq -\frac{C}{2B}$$ ஆயினாலும்,

$\therefore$ மேலுள்ள நிபந்தனை தீர்க்கப்படும்.

$\therefore$ x இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் $B>0$ எனின் $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ என்பது $-\dfrac{C}{2B}$ யினுஞ் சிறிய எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது; அன்றி $B<0$ எனின், $-\dfrac{C}{2B}$ யிலும் பெரிய எப்பெறுமானத்தையும் அது எடுக்காது.

இன்னும், $2By+C>0$ ஆகும்பொழுது x இலுள்ள அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினது தன்மைகாட்டி நேராயிருப்பதால், $-\dfrac{C}{2B}, \dfrac{a}{p}$ என்பன வல்லாத y எடுக்கும் எப்பெறுமானமும் x இனுடைய வேறுவேறான இரு பெறுமானங்களுக்கு அடையப்படும் என்பது பெறப்படும்.

12—R 11681 (1/66)

வகை II. $A > 0$ ஆகுக.

y யினுடைய வேறுவேருன பெறுமானங்களுக்கு $Ay^2 + 2By + C$ என்பதன் குறியை ஆராய்தல் வேண்டும்-

இது y யின் ஓர் இருபடிச் சார்பு.

$\therefore B^2 - AC < 0$ எனின், y யினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $Ay^2 + 2By + C$ என்பதற்கு A யினது குறியே யிருக்கும்.

$B^2 - AC = 0$ எனின், $Ay^2+2By+C$ என்பது y யின் ஒரு குறித்த பெறுமானத்திற்குப் பூச்சியமாகி y யினுடைய பிற பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் A யின் குறியையே எடுக்கும்.

$\therefore B^2 - 4AC \leq 0$ எனின், y யினுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $Ay^2 + 2By + C \geq 0$; ஆகவே, y யின் எப்பெறுமானத்திற்கும் x இலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு x இற்கு மெய்ப் பெறுமானங்களைத் தரும்; அதாவது, x இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ என்னுஞ் சார்பு தந்த யாதும் பெறுமானத்தை எடுக்கும். y யிற்குத் தந்த பெறுமானம் $py - a = 0$, $Ay^2 + 2By + C = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுள் யாதொன்றையுந் தீர்க்காதாயின், அச்சார்பு x இன் வேறு வேருன இரண்டு பெறுமானங்களுக்கு அப்பெறுமானத்தை அடையும்.

$B^2 - AC > 0$ எனின், $Ay^2 + 2By + C$ என்னும் இருபடிச் சார்பு $A(y-\alpha)(y-\beta)$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாம். இங்கு, α, β என்பன வேறு வேருன இரு மெய்யெண்கள்.

$\therefore y$ என்பது α, β என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கவில்லையெனிற்ருன், $Ay^2 + 2By + C \geq 0$

$\therefore \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ என்னுஞ் சார்பு x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் α, β என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும் ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

வகை III. $A<0$ ஆகுக ; ஆயின் p என்பது பூச்சியமாகாது.

$$\therefore B^2 - AC = (-bq + 2ar + 2pc)^2 - (q^2 - 4pr)(b^2 - 4ac)$$

$$= \left(-bq - 2ar + 2pc + \frac{aq^2}{p}\right)^2 + (4pr - q^2)\left(b - \frac{aq}{p}\right)^2$$

$q^2 - 4pr$ என்பது மறையாயிருத்தலால் $b - aq/p = 0$ என்பது புறக்கணிக்கப்பட்டமையால், $B^2 - AC$ என்பது நேராகும்.

$$\therefore A<0,\ B^2 - AC > 0.$$

α, β என்பன வேறுவேருன இரு மெய்யெண்களாயின்,

$Ay^2 + 2By + C$ என்பது $A(y-\alpha)(y-\beta)$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படலாம்.

$\therefore y$ என்பது α,β என்பனவற்றிற்கு இடையில், (இரண்டும் உட்படக்) கிடந்தாற்ருன் $Ay^2 + 2By + C \geqslant 0$.

$\therefore \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ என்னுஞ் சார்பு x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் α,β என்பவற்றிற்கு இடையில் (இரண்டும் உட்பட) உள்ள பெறுமானங்களை மாத்திரம் எடுக்கும்.

உ-ம். 1. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ என்னுஞ் சார்பினது நடத்தையைத் தொடர்ந்து காண்க ; அதனை ஒரு வரைபால் விளக்குக.

$$y = \frac{x^2+1}{(x-1)^2} \text{ ஆகுக.}$$

$$\therefore \quad x^2(y-1) - 2xy + y - 1 = 0.$$

$$y=1 \text{ ஆகும்பொழுது } x=0.$$

y இன் வேறு யாதும் பெறுமானத்திற்கு x என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும்.

$y^2 - (y-1)^2 \geqslant 0$ எனின்,

அதாவது $2y - 1 \geqslant 0$ எனின்,

அதாவது $y \geqslant \frac{1}{2}$ எனின்,

அச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களானவை மெய்யாகும்.

ஆகவே, x இனுடைய மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு y எடுக்கும் எப்பெறுமானமும் $\frac{1}{2}$ இலுஞ் சிறிதாகாது.

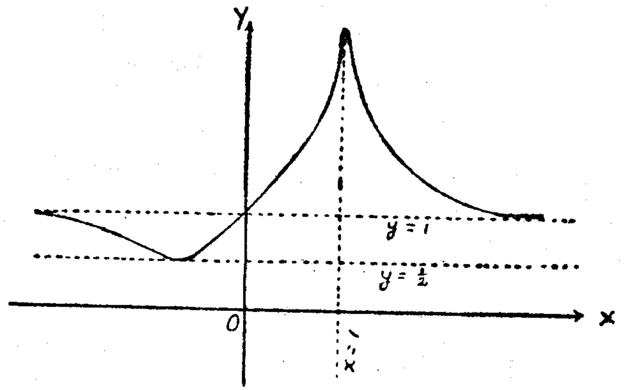
$\frac{1}{2}$ இலும் பெரிதான y யின் எப்பெறுமானத்திற்கும் ஒத்தனவாய் $y = 1$ அல்லாதபோது x இற்கு இரு பெறுமானங்கள் இருக்கும். $y = \frac{1}{2}$ ஆயிருக்கும்பொழுது x இற்கு $-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ அல்லது $(x+1)^2 = 0$ என்பதாலே தரப்படும் இரண்டு பொருந்தும் மூலங்கள் இருக்கும்.

ஆகவே, அச்சார்பின் வரைபு, $y = \frac{1}{2}$ என்னுங் கோட்டிற்கு மேலே முழுவதுங் கிடக்குமாறு இருத்தல் வேண்டும். இக்கோடு $(-1, \frac{1}{2})$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள அவ்வரைபின் ஒரு தொடலியாகும்.

$y = 1$ என்னுங் கோடு அவ்வரைபை $(0, 1)$ என்னும் ஒரு புள்ளியிலே வெட்டும். x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாய் $y = \frac{1}{2}$ என்னுங் கோட்டிற்கு

மேலேயுள்ள வேறு யாதுங் கோடு அவ்வரைபை வேறுவேறான இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

y என்பது $x=1$ அல்லாத x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் வரையறுக்கப்படும். ஆகவே, $x=1$ என்னுங் கோடு அவ்வரைபை ஓரிடத்திலும் வெட்டாது. x என்பது 1 இலும் பெரிதாய் அல்லது 1 இலுஞ் சிறிதாய் 1 இற்கு மிக்க அண்மையில் இருக்கும்பொழுது, x^2+1 என்பது மிக்க அண்ணளவாக 2 ஆகும்; அப்போது $(x-1)^2$ என்பது மிகச்சிறிய ஒரு நேர்க்கணியமாகும். ஆகவே, y என்பது நேராய் மிகப் பெரிதாகும். ஆகவே, $x=1$ என்னுங் கோட்டை உறுதியாக அணுகிக் கொண்டு அதனுடைய இரு பக்கங்களிலும் x அச்சிற்கு மேலே அவ்வரைபிற்கு முடிவில்லாத இரு கிளைகள் இருக்கும்.



$x=1$ என்னுங்கோடு அவ்வளையியின் **அணுகுகோடு** எனப்படும்.

x என்பது பூச்சியமல்லாதபோது, $y=\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$.

x இன் எண்பெறுமானம் மிகப்பெரிதாகும்பொழுது, இது மிக்க அண்ணளவாக 1 இற்குச்சமன். ஆகவே, x என்பது நேராய் மிகப்பெரிதாயிருக்கும் பொழுதும், அது மறையாய் மிகப்பெரிய எண்பெறுமானத்தை உடையதாயிருக்கும்பொழுதும், அவ்வளையி $y=1$ என்னுங் கோட்டிற்கு மிக்க அண்மையில் இருக்கும். ஆகவே, அதற்கு $y=1$ என்னுங் கோட்டை அணுகிக் கொண்டு முடிவில்லாத இரண்டு கிளைகள் ஒன்று y அச்சினது நேர்ப்பக்கத்திலும் மற்றையது மறைப்பக்கத்திலுமாக இருக்கும். $y=1$ என்னுங்கோடும் அவ்வளையிக்கு ஓர் அணுகுகோடாகும்.

உ-ம். 2. x இனுடைய வேறுவேறு பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{4-3x}{(x-1)\,(x-2)}$ என்பதனுடைய நடத்தையை ஆராய்க.

$$y=\frac{4-3x}{(x-1)(x-2)} \text{ ஆகுக.}$$

$$\therefore\ x^2y-3x\,(y-1)+2y-4=0,$$

$$\therefore\ y=0 \text{ ஆகும்பொழுது } x=\tfrac{4}{3};$$

மற்றைப்படி, $9(y-1)^2-4y(2y-4)\geq 0$ ஆயினாற்றான் x என்பது மெய்யாகும்.

அதாவது $y^2-2y+9\geq 0$.

ஆனால், எல்லா y யிற்கும் $y^2-2y+9=(y-1)^2+8>0$.

∴ y யின் பூச்சியமல்லாத எப்பெறுமானத்திற்கும், x இற்கு வேறுவேறான இரண்டு மெய்ப்பெறுமானங்கள் இருக்கும்; அதாவது x இனுடைய வேறுவேறான இரண்டு பெறுமானங்களுக்கு அத்தந்த சார்பு பூச்சியமல்லாத யாதுந் தந்த ஒரு பெறுமானத்தை எடுக்கும். ஆகவே, அச்சார்பின் வரைபு x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான எக்கோடும் அதனை வேறு வேறான இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு இருக்கும்; அப்போது x அச்சே அவ்வரைபை ஒரு புள்ளியிலேயே வெட்டும்.

$x=1$ அல்லது $x=2$ ஆகும்பொழுது அச்சார்பு வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

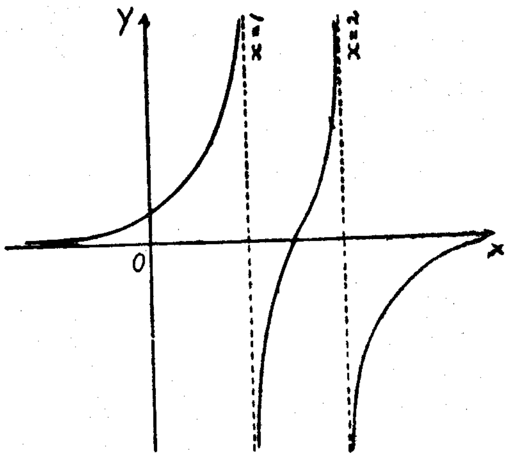
$x=1$, $x=2$ என்னுங் கோடுகள் இரண்டும் அவ்வரைபை ஓரிடத்திலும் வெட்டா.

x என்பது 1 இற்கு மிக்க அண்மையில் இருக்கும் பொழுது, $4-3x$ என்பது மிக்க அண்மையாக 1 இற்குச் சமனாகும்; அப்போது $x-2$ என்பது மிக்க அண்மையாக -1 இற்குச் சமனாகும்; ஆனால், 1 இலும் பெரிதாய் x இருக்கும்போது $x-1$ என்பது நேராய் மிகச்சிறிதாயும் 1 இலுஞ் சிறிதாய் x இருக்கும்போது மறையாய், நுண்ணெண் பெறுமானம் உள்ளதாயும் இருக்கும். ஆகவே, x என்பது 1 இலும் சற்றுப் பெரிதாயிருக்கும்பொழுது y என்பது மறையாய் மிகப்பெரிய எண் பெறுமானத்தை உடையதாய் இருக்கும். x என்பது 1 இலும் சற்றுச் சிறிதாயிருக்கும் பொழுது y என்பது நேராய் மிகப்பெரிய பெறுமானம் உடையதாயிருக்கும்.

$x=1$ என்னுங் கோடு அவ்வளையிக்கு ஓர் அணுகுகோடாகும். இனி, x என்பது 2 இலும் சற்றுப் பெரிதாயிருக்கும்பொழுது y என்பது மறையாய் மிகப்பெரிய எண்பெறுமானமுடையதாய் இருக்கும். x என்பது

2 இலும் சற்றுச் சிறிதாயிருக்கும்பொழுது y என்பது நேராய் மிகப் பெரிய பெறுமானம் உடையதாயிருக்கும்.

$x=2$ என்னுங் கோடும் ஓர் அணுகுகோடாகும்.



x என்பது பூச்சியமல்லாத பொழுது,

$$y=\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

ஆகவே, x இன் எண்பெறுமானம் மிகப்பெரிதாயிருக்கும்பொழுது, y யின் எண்பெறுமானம் மிக்க அண்ணளவிற்குப் பூச்சியமாகும். ஆகவே, $y=0$ என்னுங்கோடும் ஒரு அணுகுகோடாகும்.

உ-ம் 3. x இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ இனது நடத்தையை ஆராய்க.

$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ஆகுக.

$\therefore\ x^2(y-1)+x(y+1)+y-1=0.$

$y=1$ ஆகும்பொழுது $x=0$.

மற்றைப்படி, $(y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0$ ஆயினுற்றான்,

அதாவது, $(3y-1)(3-y)\geq 0$ ஆயினுற்றான்,

அதாவது, $(y-\frac{1}{3})(y-3)\leq 0$ ஆயினுற்றான், x என்பது மெய்யாகும்.

ஆகவே, x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் y என்பது $\frac{1}{3}$, 3 என்பனவற்றிற்கு இடையில், (இரண்டும் உட்படக்) கிடத்தல் வேண்டும்.

$y=\dfrac{1}{3}$ ஆகும்பொழுது, $x^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)+x.\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=0$;

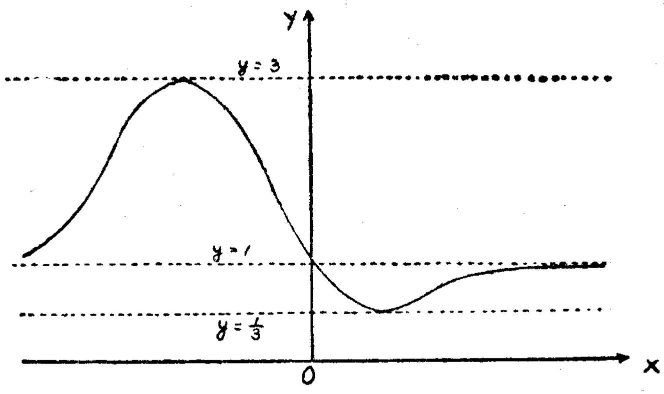
அதாவது $(x-1)^2=0.$

$y=3$ ஆகும்பொழுது, $2x^2+4x+2=0$;

அதாவது $(x+1)^2=0.$

ஆகவே, $y=\frac{1}{3}$, $y=3$ என்னுங் கோடுகளானவை முறையே $(1,\frac{1}{3})$ $(-1,3)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள அச்சார்பின் வரைபினுடைய தொடலிகளாகும்.

$y=1$ என்னுங் கோடு அவ்வரைபை $(0,1)$ என்னும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். $y=\frac{1}{3}$, $y=3$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் இக் கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாயுள்ள பிறகோடு ஒவ்வொன்றும் அவ்வரைபை வேறுவேறான இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும்.



x என்பது பூச்சியமல்லாததாய் இருக்கும்போது, $y=\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

x இன் எண்பெறுமானம் மிகப்பெரிதாய் இருக்கும்போது இது மிக்க அண்ணளவாய் 1 இற்குச் சமனாகும்.

ஆகவே, $y=1$ என்னுங்கோடு அவ்வளையிக்கு ஓர் அணுகுகோடாகும்.

பயிற்சி 28

1. x இனுடைய மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{(x+1)\ (x-2)}{x-1}$ என்னுஞ் சார்பு எம் மெய்ப் பெறுமானத்தையும் எடுக்குமெனக் காட்டுக.

2. x இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் $b^2-4ac<0$ எனின் $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-1)\ (x-2)}$ என்பது நிலையான இருபெறுமானங்களுக்கு இடையிற் கிடக்கின்ற ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காதெனக் காட்டுக.

3. a, b என்பன முரணான குறிகளை உடையனவாயிருக்க, $a+b$ என்பது பூச்சியமன்றெனின், x இனுடைய வேறுவேறான இரு பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{x^2+ab}{(x-a)\ (x-b)}$ என்னுஞ் சார்பு தந்த யாதுமொரு பெறுமானத்தை எடுக்குமெனக் காட்டுக.

4. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x+9}$ என்பது x இனுடைய மெய்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரு மிகப் பெரிய பெறுமானத்தையும் ஒரு மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும் எடுக்குமெனக் காட்டுக.

5. $\dfrac{x^2+5x+4}{(x-1)^2}$ என்பது x இனுடைய மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையன்றி ஒரு மிகச்சிறிய பெறுமானத்தையே உடையதாகும் எனக் காட்டுக.

6. $0<p<1$ எனின், $\dfrac{x-p}{x^2-2x+p}$ என்னுஞ் சார்பு எல்லாப் பெறுமானங்களையும் அடையக்கூடியது எனக் காட்டுக $p=\dfrac{3}{4}$ ஆகும்பொழுது, அதன் வரைபை வரைக.

7. $a>1$ எனின், x இனுடைய வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{ax^2+2x+1}{x^2+2x+a}$ என்னுங் கோவை நிலையான இரு பெறுமானங்களுக்கு இடையிற் கிடக்கும் பெறுமானங்களை மாத்திரம் எடுக்குமெனக் காட்டுக.

$0<a<1$ எனின், அது யாதுமொரு பெறுமானத்தை எடுக்குமெனக் காட்டுக.

8. $0<p<1$ எனின், $4px^2-4\ (p+1)\ x+p^2-2p+5=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு, x இற்கு α, β என்னும் வேறுவேறான இரு மெய்ப் பெறுமானங்களைத் தருமென்றும் இப்பெறுமானங்கள் இரண்டும் 1 இலும் பெரியனவாகுமென்றுங் காட்டுக.

x இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் q என்பது α, β என்னும் ஒவ்வொன்றிலும் பெரிதாயின், $\dfrac{x^2-2x+p}{x^2-2qx+1}$ என்னுங் கோவை நிலையான இரண்டு எண்களுக்கு இடையிலுள்ள பெறுமானங்களை எடுக்காதெனக் காட்டுக.

பொது அட்சரகணிதச் சமன்பாடு.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணும் $a_0, a_1, \ldots a_n$ என்பன n எண்களாயுமிருக்க அவற்றுள் a_0 என்பது பூச்சியமன்றெனின்,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடு x இல் n என்னும் படியையுள்ள ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு எனப்படும்.

x இல் n என்னும் படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பிக் கோவை x இனுடைய வேறுவேறான n பெறுமானங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகைக்குப் பூச்சியமாகாதாகையால், n என்னும் படியுள்ள ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாட்டிற்கு வேறுவேறான n மூலங்களுக்கு மேற்பட்ட தொகையான மூலங்கள் இராதென்பது பெறப்படும்.

மேலுள்ள சமன்பாட்டிற்கு $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்னும் மெய் மூலங்கள் உண்டு எனக் கொள்க.

ஆயின், $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ என்னும் பல்லுறுப்பியும் $a_0\ (x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)$ என்பதும் ஒன்றே.

அவ்விரு கோவைகளிலும் x^{n-1} இனுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$a_1=a_0\ (-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n).$$

$\therefore$ அம்மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை $=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0}$.

x^{n-2} இனுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த,

$$a_2=a_0\ (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\ldots).$$

$\therefore$ தடவைக்கு இரண்டாக எடுத்த அம்மூலங்களினுடைய பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=\dfrac{a_2}{a_0}$.

x^{n-3} இனுடைய குணகங்களைச் சமன்படுத்த, தடவைக்கு மூன்றாக எடுத்த அம்மூலங்களுடைய பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=-\dfrac{a_3}{a_0}$ என்பதாகும்; இவ்வாறே பிறவும்.

$n=2$ என்னும் வகை இதற்கு முன் ஆராயப்பட்டுள்ளது.

$n=3$ எனின், a என்பது பூச்சியமல்லாததாயிருக்க, சமன்பாடு $ax^3+bx^2+cx+d=0$ என்னும் வடிவத்திலிருக்கும்.

அச்சமன்பாட்டிற்கு α, β, γ என்னும் மூன்று மெய்மூலங்கள் இருந்தால்,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$ என்பன.

உதாரணம்.

$$x + y + z = 6,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 36$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

முதன்முதல் $xy + yz + zx$, xyz என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைப் பெறுவோம்.

$$2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= 36 - 14 = 22.$$
$$\therefore \quad xy + yz + zx = 11.$$

இனி, $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$\therefore \; 36 - 3xyz = 6\,(14 - 11) = 18.$$
$$\therefore \; xyz = 6.$$

$t^3 + bt^2 + ct + d = 0$ என்னும் வடிவத்தில் t யிலுள்ள ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டை ஆராய்க.

இச்சமன்பாட்டிற்கு $t = x$, $t = y$, $t = z$ என்னும் மூலங்கள் இருந்தால்,

$$b = -(x + y + z) = -6.$$
$$c = xy + yz + zx = 11, \quad d = -xyz = -6.$$

$\therefore$ அம்முப்படிச் சமன்பாடு $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$ என்பதாகும்.

இச்சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் 1, 2, 3 என்பனவாகும் என்பது எளிதிற் காணப்படும்.

$\therefore$ x, y, z என்பனவற்றிலே தந்த சமன்பாடுகளுக்கு ஆறு தீர்வுகள் இருக்கும். அவை பின்வருமாறு :—

(i) $x = 1, \; y = 2, \; z = 3.$ (iv) $x = 2, \; y = 3, \; z = 1.$
(ii) $x = 1, \; y = 3, \; z = 2.$ (v) $x = 3, \; y = 1, \; z = 2.$
(iii) $x = 2, \; y = 1, \; z = 3.$ (vi) $x = 3, \; y = 2, \; z = 1.$

பயிற்சி 29

1. $x^3 - 2x^2 + bx - c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய்மூலங்கள் இருக்க அவற்றுள் ஒன்று ஏனைய இரண்டின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனுயின், $b = c + 1$ எனக் காட்டுக.

2. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்கள் பெருக்கல் விருத்தியில் இருந்தால், $b^3 = ca^3$ எனக் காட்டுக.

3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு பொருந்தும் மூலங்கள் இருந்தால், $(9c - ab)^2 = 4\,(b^2 - 3ac)\,(a^2 - 3b)$ எனக் காட்டுக.

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $y^2 = 4ax$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் x இற்கு, 4 இற்கு மேற்பட்ட வேறுவேறு பெறுமானங்களைத்தரா எனக் காட்டுக. x இற்கு, 4 பெறுமானங்கள் இருந்தால், அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகுமெனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 3

முதல் n நேர் முழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1.$$
$$\therefore \; 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1).$$
$$= n\,(n+1).$$
$$\therefore \; \mathbf{S = \frac{n}{2}(n+1)}$$

முதல் n முழுவெண்களினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$ எனக் காட்டுவோம்.

A, B, C என்பன r ஐச் சாராமலிருக்க

$$f(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $$f(r-1) = A\,(r-1)^3 + B(r-1)^2 + C(r-1)$$
$$\therefore \; f(r) - f(r-1) = A\,(3r^2 - 3r + 1) + B(2r-1) + C.$$

$3A = 1$ ஆயும், $-3A + 2B = 0$ ஆயும், $A - B + C = 0$ ஆயும் இருந்தால், அதாவது $A = \frac{1}{3}$ ஆயும், $B = \frac{1}{2}$ ஆயும், $C = \frac{1}{6}$ ஆயும் இருந்தால், இது r^2 இற்குச் சமனுகும்.

$$\therefore \; f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6} \text{ எனின்,}$$
$$f(r) - f(r-1) = r^2.$$

தொடர்ச்சியாக $r = 1, 2, \ldots, n$ எனப் பிரதியிட

$$f(1) - f(0) = 1^2,$$
$$f(2) - f(1) = 2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n) - f(n-1) = n^2.$$
$$\therefore \; 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = f(n) - f(0)$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 0$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(2n^3 + 3n^2 + n)$$
$$= \mathbf{\frac{n}{6}(n+1)\,(2n+1)}.$$

முதல் n முழுவெண்களினுடைய கனங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ என நிறுவுவோம்.}$$

$$f(r)=Ar^4+Br^3+Cr^2+Dr \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின் $f(r-1)=A(r-1)^4+B(r-1)^3+C(r-1)^2+D(r-1)$.

$\therefore f(r)-f(r-1)=A(4r^3-6r^2+4r-1)+B(3r^2-3r+1)+C(2r-1)+D$.

$4A=1$ ஆயும், $-6A+3B=0$ ஆயும், $4A-3B+2C=0$ ஆயும் $-A+B-C+D=0$ ஆயுமிருந்தால், அதாவது $A=\frac{1}{4}$ ஆயும், $B=\frac{1}{2}$ ஆயும், $C=\frac{1}{4}$ ஆயும், $D=0$ ஆயுமிருந்தால், இது r^3 இற்குச் சமனாகும்.

$$\therefore\ f(r)=\tfrac{1}{4}r^4+\tfrac{1}{2}r^3+\tfrac{1}{4}r^2 \text{ எனின், } f(r)-f(r-1)=r^3$$

$$\therefore\ f(1)-f(0)=1^3.$$
$$f(2)-f(1)=2^3.$$
$$f(3)-f(2)=3^3.$$

....

....

....

$$f(n)-f(n-1)=n^3.$$

$$\therefore\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=f(n)-f(0)$$
$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$
$$=\frac{\mathbf{n^2(n+1)^2}}{\mathbf{4}}.$$

உதாரணம் 1.

$1.3+2.4+3.5+\ldots+n(n+2)$ என்னுந் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$r \text{ ஆம் உறுப்பு } = r(r+2)=r^2+2r.$$

n உறுப்புக்கள் வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகை

$$=1^2+2^2+\ldots+n^2+2(1+2+\ldots+n)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7).$$

உதாரணம் 2.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots-(2n)^3$ என்னுந் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

கூட்டுத்தொகை

$$=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(2n)^3-2[2^3+4^3+\ldots+(2n)^3]$$
$$=\left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2-16[1^3+2^3+\ldots+n^3]$$
$$=\left[n(2n+1)\right]^2-\frac{16n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=-n^2(4n+3).$$

கணிதத் தொகுத்தறிவு

தொகுத்தறி முறை என்பது மாறும் நேர் முழுவெண்ணோடு தொடர்புள்ள முடிபுகளை நிறுவுதற்கு வழங்கப்படும். n என்னும் மாறு நேர் முழுவெண்ணை அகப்படுத்தும் ஒரு குறித்த முடிபு, குறித்த ஒரு பெறுமானத்திற்கு அப்பால் n இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகுமெனக் காட்டுதற்கு, ஆராய்ந்த n இன் முதற் பெறுமானத்திற்கு அம்முடிபை வாய்ப்புப் பார்த்து அதன்பின் அம்முடிபு n இனது தந்த யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு உண்மையெனின், அடுத்த பெறுமானத்திற்கும் அது உண்மையாதல் வேண்டும் எனக் காட்டல் போதியதாகும்.

அம்முறை பின்வரும் உதாரணங்களால் விளக்கப்படும் ;

உதாரணம் 1.

n இனுடைய நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக் காட்டுக.

$n=1$ ஆகும்பொழுது முடிபு $1^2=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$ ஆகும்.

இது உண்மை.

$\therefore$ அம்முடிபு n இன் ஆராயப்பட்ட முதற் பெறுமானத்திற்கு உண்மையாகும்.

p என்பது யாதுமொரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்க.

அம்முடிபு $n=p$ யாகும்பொழுது உண்மை எனக் கொள்க.

ஆயின்,

$$1^2+2^2+\ldots+p^2=\frac{p}{6}(p+1)(2p+1).$$

இருபக்கங்களுக்கும் $(p+1)^2$ என்பதைக் கூட்ட,

$$1^2+2^2+\ldots+p^2+(p+1)^2=\frac{p}{6}(p+1)(2p+1)+(p+1)^2$$
$$=\frac{p+1}{6}\{p(2p+1)+6(p+1)\}$$
$$=\frac{p+1}{6}(p+2)(2p+3)$$
$$=\frac{p+1}{6}(\overline{p+1}+1)(2\overline{p+1}+1).$$

$\therefore\ n=p+1$ ஆகும்பொழுதும் அம்முடிபு உண்மையாகும்.

அதாவது, அம்முடிபு $n=p$ ஆகும்பொழுது உண்மையாகுமெனின், $n=p+1$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மையாகும்.

ஆனல், $n=1$ ஆகும்பொழுது அது உண்மை எனக் கண்டுள்ளோம்.

$\therefore\ n=2$ ஆகும்பொழுது அது உண்மையாகும்.

$\therefore\ n=3$ ஆகும்பொழுது அது உண்மையாகும்.

இவ்வாறே பிறவும்.

$\therefore\ n$ இனுடைய நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அது உண்மையாகும்.

உதாரணம் 2.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது $x-1$ என்பது x^n-1 என்பதன் ஒரு காரணி யெனக் காட்டுக.

$n=1$ ஆகும்பொழுது அம்முடிபு உண்மை என்பது தெளிவு.

$n=p$ ஆகும்பொழுது அது உண்மையாகுமெனக் கொள்க.

$$x^{p+1}-1=x(x^p-1)+(x-1)$$

$x-1$ என்பது வலப்பக்கக் கோவையின் ஒரு காரணி.

$\therefore\ x-1$ என்பது (x^p-1) என்பதற்கு ஒரு காரணியாயின், அது $(x^{p+1}-1)$ என்பதற்கும் ஒரு காரணியாகும்.

அதாவது, அம்முடிபானது $n=p$ யாகும்பொழுது உண்மையாயின், $n=p+1$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மையாகும்.

$n=1$ ஆகும்பொழுது அது உண்மை.

$\therefore n=2,\ 3,\ldots$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மை.

உதாரணம் 3.

n இனுடைய நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $2^{n+1}>n(n-1)$ எனக் காட்டுக.

$n=p$ யாகும்பொழுது அது உண்மை எனக் கொள்க.

அதாவது, $2^{p+1}>p(p-1)$.

இரு பக்கங்களேயும் 2 ஆற் பெருக்குக.

ஆயின், $2^{p+2}>2p(p-1)$.

இனி, $p\geq 3$ எனின், $2p-2\geq p+1$.

$\therefore p\geq 3$ எனின், $2^{p+2}>(p+1).p$

3 இலும் பெரிது அல்லது அதற்குச் சமனுன p யின் யாதொரு பெறுமானத்திற்கும் அம்முடிபு உண்மை எனின், p யின் அடுத்த பெறுமானத்திற்கும் அது உண்மையாகும்.

$n=1$ ஆகும்பொழுது, அம்முடிபு $2^2>0$ என்பதாகும்; இது உண்மை.

$n=2$ ஆகும்பொழுது, அம்முடிபு $2^3>2.1$ என்பதாகும். ; இது உண்மை.

$n=3$ ஆகும்பொழுது, அம்முடிபு $2^4>3.2$ என்பதாகும் : இதுவும் உண்மை.

$n=3$ ஆகும்பொழுது, அம்முடிபு உண்மையாகுமாதலால், $n=4,\ 5,\ 6,\ldots$ ஆகும் பொழுதும் அது உண்மையாகும்.

$\therefore\ n$ இனுடைய நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அம்முடிபு உண்மையாகும்.

பயிற்சி 30

1. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n(n+1)(n+2)$ என்னுந் தொடரின் n உறுப்புக்கள் வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகை

$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ எனக் காட்டுக.

2. S_n என்பது முதல் n நேர்முழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் குறித்தால்,

$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ எனக் காட்டுக.

3. n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$1.n+2.(n-1)+3.(n-2)+\ldots+n.1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

எனக் காட்டுக.

4. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$ எனக் காட்டுக.

5. $a,\ b$ என்பன நேரெண்களாக அவற்றுள் $b>a$ எனின், n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயிருக்கும்பொழுது, $b^n>na^{n-1}(b-a)$ எனக் காட்டுக.

6. n என்பது 1 இலும் பெரிதான ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}<n\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$ எனக் காட்டுக.

7. n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$(1^4-2^4)+(3^4-4^4)+(5^4-6^4)+\ldots+\{(2n-1)^4-(2n)^4\}$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

8. n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயின்,

$$1.3.4+2.4.5+3.5.6+\ldots+n(n+2)(n+3)$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

9. $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n, \ldots$ என்னும் நேரெண்களின் முடிவுருத தொடரொன்று எல்லா n இற்கும் $2u_{n+1}=u_n^2+1$ என்னுந் தொடர்பைத் தீர்க்கின்றது.

$u_1<1$ எனின் எல்லா n இற்கும் $u_n<1$ எனக் காட்டுக.

10. $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots, u_n, \ldots,$ என்னும் எண்களின் முடிவுருத தொடரொன்று u_n, u_{n+1}, u_{n+2} என்னும் எவையேனும் மூன்று அடுத்துள எண்கள் $u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$ ஆகும்படி இருக்கின்றது. $u_1=5,\ u_2=13$ ஆயின், எல்லா n இற்கும் $u_n=2^n+3^n$ எனக் காட்டுக.

அத்தியாயம் 4

வரிசைமாற்றமுஞ் சேர்மானமும்.

வரிசை மாற்றம்

$a,\ b,\ c,\ d$ என்னும் நான்கு எழுத்துக்கள் எங்களுக்கு உண்டென்றும் அவற்றுள் எவையேனும் மூன்றை எடுத்து அம்மூன்று எழுத்துக்களையும் ஒரு நேர் கோட்டில் ஒழுங்காக வைக்கவேண்டுமெனவும் கொள்க. இது பல வழிகளாற் செய்யக் கூடியது. $a,\ b,\ c$ என்னும் எழுத்துக்களை எடுத்தோமாயின், பின்வரும் ஆறு ஒழுங்குகளுள் யாதுமொன்றை எடுத்தல் கூடும் :—

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

$a,\ b,\ d$ என்னும் எழுத்துக்களை எடுத்தோமாயின் வேறுவேறன ஆறு ஒழுங்குகளைப் பெறுவோம். $a,\ c,\ d$ என்னும் எழுத்துக்களை எடுத்தோமாயின், வேறு ஆறு ஒழுங்குகளைப் பெறுவோம் ; இறுதியாக $b,\ c,\ d$ என்னும் எழுத்துக்களை எடுத்தோமாயின், வேறு ஆறு ஒழுங்குகளைப் பெறுவோம். ஆகவே, $a,\ b,\ c,\ d$ என்னும் நான்கு எழுத்துக்களுள்ளே தடவைக்கு மூன்று ஆக எடுக்கப்படும் வேறுவேறன ஒழுங்குகளின் மொத்தம் 24.

அதாவது, தடவைக்கு 3 ஆக எடுக்கப்படும் 4 வேறுவேறன பொருள்களின் வரிசைமாற்றத் தொகை 24.

தடவைக்கு r ஆக எடுக்கப்படும் n வேறுவேறன பொருள்களின் வரிசைமாற்றத் தொகையானது அந்த n பொருள்களுள் r பொருள்களை எடுத்து ஒரு வரிசையில் ஒழுங்காக வைத்தலால் ஆகக் கூடிய வேறுவேறன ஒழுங்குகளினது தொகையாகும். $n,\ r$ என்பன நேர் முழுவெண்களாயிருக்க அவற்றுள் n என்பது r இலுஞ் சிறிதன்றெனின், அவ்வரிசைமாற்றத்தொகை ^nP_r ஆற் குறிக்கப்படும்.

$$^4P_3=24$$ எனக் கண்டுள்ளோம்.

இப்பொழுது, $n,\ r$ என்பனவற்றினுடைய தந்த பெறுமானங்களுக்கு ^nP_r என்பதைக் கணிக்கத் துணைசெய்யும் ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறுவோம்.

$^n\mathbf{P}_r$ இற்குச் சூத்திரம்.

எம்மிடம் n வேறுவேறன பொருள் உண்டு ; அவற்றுள் r பொருள்களை யாதும் ஒரு விதத்திலே தேர்ந்தெடுத்து அவற்றை ஒரு நேர் கோட்டில் யாதும் ஒரு விதத்தில் ஒழுங்காக வைத்தல் வேண்டும். ஒரு நேர் கோட்டில் அந்த r பொருள்களும் வைக்கப்படவேண்டிய r வெறுமையான இடங்களைச் சிந்திக்க. வெறுமையான ஒவ்வோர் இடமும் ஒரு பொருளாலே நிரப்பப்படக்கூடிய வழிகளினது தொகையைத் துணிய

வேண்டும். ஒரு மூலையிலிருந்து தொடங்கி ஒவ்வொன்றாக அவ்விடங்களை நிரப்பத் தொடங்குகின்றோம் எனக் கொள்க. n பொருள்களுள் யாதும் ஒன்று தேரப்படலாமாதலின், முதலாம் இடம் n வழிகள் பற்றி நிரப்பப் படலாம். இந்த n வழிகளுள் யாதும் ஒன்றுபற்றி நிரப்புகின்றோம் எனக் கொள்க. ஆயின், எம்மிடம் நிரப்புதற்கு $(n-1)$ பொருள்கள் விடப்பட்டுள்ளன. இப்பொழுது மீந்திருக்கின்ற $(n-1)$ பொருள்களுள் யாதும் ஒன்று தேரப்படலாமாதலின், இரண்டாம் இடம் $(n-1)$ வழிகள் பற்றி நிரப்பப்படலாம். ஆகவே, முதலாம் இடம் நிரப்பப்படும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஒக்க, இரண்டாம் இடம் நிரப்பப்படுதற்கு $(n-1)$ வழிகள் உண்டு. ஆகவே, முதல் இரண்டு இடங்களும் நிரப்பப்படக்கூடிய வேறு வேறான வழிகளின் மொத்தம் $n(n-1)$. இவ்வீர் இடங்களும் இந்த $n(n-1)$ வழிகளுள் யாதும் ஒன்றுபற்றி நிரப்பப்பட்ட பொழுது மீதியாக $(n-2)$ பொருள்கள் இருக்கும். முதல் இரண்டு இடங்களை நிரப்பும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஒக்க, மூன்றும் இடத்தை நிரப்பும் $(n-2)$ வழிகள் இருக்கும். ஆகவே, முதன் மூன்று இடங்களும் $n(n-1)$ $(n-2)$ வழிகள்பற்றி நிரப்பப்படலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து சென்று, யாதும் ஒரு நிலைமையிற் காரணிகளினது தொகை நிரப்பப்படும் இடங் களினது தொகைக்குச் சமன் எனவும் கவனித்தால், r வெறுமையான இடங்களை நிரப்பும் வேறுவேறான வழிகளினது தொகை $n(n-1)(n-2)$ $(n-3)\ldots r$ காரணிகள் வரைக்கும்

$$=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ எனக் காண்போம்.}$$

$$\therefore {}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

வேறொரு வழி.

அந்த n வேறுவேறான பொருள்கள் $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்னும் எழுத்துக் களாற் குறிக்கப்படுக.

முறைக்கு r ஆக எடுக்கப்படும் இந்த n எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றத் தொகை ${}^nP_r$. இவ்வரிசை மாற்றங்களுள் ஒரு குறித்த தொகை யில் a_1 என்னும் எழுத்து முதலாம் இடத்தில் உள்ளதாகும். a_1 என்னும் இவ்வெழுத்தைத் தவிர்த்து முறைக்கு $r-1$ ஆக எடுக்கப்படும் மீதி $(n-1)$ எழுத்துக்களைக் கொண்டு செய்யக்கூடிய வரிசை மாற்றங்கள் எல்லாவற்றையும் ஆக்கி, அதன்பின் ஒவ்வோர் ஒழுங்கிலும் முதலிடத்தில் a_1 என்னும் எழுத்தை வைத்தால், முறைக்கு r ஆக எடுக்கும் அந்த n எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றங்கள் எல்லாவற்றுள்ளும் a_1 முதலாகவுள்ளனவற்றைப் பெறுவோம். ஆகவே, a_1 முதலாகவுள்ள ஒழுங்குகளினது தொகை ${}^{n-1}P_{r-1}$. அதுபோல, யாதும் ஒரு குறித்த எழுத்து முதலாகவுள்ள ஒழுங்குகளினது தொகை ${}^{n-1}P_{r-1}$.

n எழுத்துக்கள் இருக்கின்றமையால் ஒழுங்குகளின் மொத்தம் $n.{}^{n-1}P_{r-1}$.

$$\therefore {}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}.$$

$n \geq r$ ஆக, இது n, r என்பனவற்றினுடைய நேர் முழுவெண் பெறு மானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும்.

n ஐ $n-1$ இற்கும் r ஐ $r-1$ இற்கும் மாற்ற,

$${}^{n-1}P_{r-1} = (n-1).{}^{n-2}P_{r-2}.$$

n ஐ $n-2$ இற்கும் r ஐ $r-2$ இற்கும் மாற்ற,

$${}^{n-2}P_{r-2} = (n-2).{}^{n-3}P_{r-3}.$$

இவ்வாறே பிறவும்.

இறுதியாக, n ஐ $n-(r-2)$ இற்கும் r ஐ $r-(r-2)$ இற்கும் மாற்ற,

$${}^{n-r+2}P_2 = (n-r+2).{}^{n-r+1}P_1,$$

ஆனால், ${}^{n-r+1}P_1$ என்பது $n-r+1$ இற்குச் சமன் என்பது தெளிவு.

$$\therefore {}^nP_r = n(n-1)\ldots(n-r+1).$$

காரணியக் குறியீடு.

ஒரே தடவையில் எல்லாம் எடுக்கப்படும் n வேறுவேறான பொருள்களின் வரிசை மாற்றத் தொகை ${}^nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1$.

இது முதல் n நேரெண்களின் பெருக்கமாகும். இப்பெருக்கம் "**காரணிய n**" என்றோ "**சிலையக n**" என்றோ கூறப்படும். இது $\underline{|n}$ என்றோ $n!$ என்றோ குறிக்கப்படும்.

$r < n$ எனின், ${}^nP_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$r=n$ ஆகும்பொழுது, இக்கோவை

$$\frac{n!}{0!} \text{ என்பதாக ஒடுங்கும்.}$$

${}^nP_n = n!$ ஆதலால், $r=n$ ஆகும்பொழுது ${}^nP_r$ இற்குரிய மேலுள்ள கோவை உண்மையாகும்படி $0!$ என்பதை 1 இற்குச் சமனாக எடுக்கின்றோம்.

உதாரணம் 1. குறிக்கப்பட்ட இரண்டு புத்தகங்கள் ஒருங்கு வைக்கப்படல் ஆகாதாயின், ஒரு தட்டின்மீது 10 புத்தகங்கள் ஒழுங்காக வைக்கப்படத் தக்க வேறுவேறான வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

கட்டுப்பாடு யாதுமின்றி அப்புத்தகங்களை ஒழுங்காக வைக்கும் வழி களினது தொகை $10!$.

குறிக்கப்பட்ட இரண்டு புத்தகங்கள் ஒருங்கு வைக்கப்படுமாறு ஒழுங்காக வைக்கும் வழிகளினது தொகையைப் பின் காணுகின்றோம். இவ்விரு புத்த கங்களும் ஒரு புத்தகம் ஆகுமாறு கட்டப்பட்டனவாகக் கற்பனை செய்தல் கூடும். அப்பொழுது எம்மிடம் 9 புத்தகம் இருக்கும்; அவை $9!$ வழி

களில் ஒழுங்காக வைக்கப்படலாம். இவ்வொழுங்குகள் ஒவ்வொன்றிலுங் குறிக்கப்பட்ட அப்புத்தகங்கள் இரண்டும் அவற்றுல் ஆக்கப்பட்ட கட்டில் இரு வழிகள்பற்றி ஒழுங்காக வைக்கப்படலாம். ஆகவே, குறிக்கப்பட்ட அவ்விரு புத்தகங்களும் ஒருங்கு இருக்கும்படி அப்புத்தகங்களை ஒழுங்காக வைக்கும் வழிகளினது தொகை $2\times 9!$. ஆகவே, குறிக்கப்பட்ட அப்புத்தகங்கள் இரண்டு ஒருங்குவராதவாறு ஒழுங்காக வைக்கும் வழிகளினது தொகை $10!-2.9!=8\times 9!$

$$=8\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$$
$$=2903040.$$

உதாரணம் 2. ஒரு வரிசையில் 10 ஆசனங்கள் உண்டெனின், எவையேனும் இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் வெறுமையாகாதவாறு 8 மனிதர் இருக்கக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

முதலாவதாகக் கட்டுப்பாடு யாதுமின்றி அம்மனிதரை இருத்தக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்போம். நாம் 8 ஆசனங்களைத் தேர்ந்து அதன்பின் இந்த 8 ஆசனங்களில் அந்த 8 மனிதர்களையும் ஒழுங்காக இருத்துதல் வேண்டும். இது செய்யக்கூடிய வழிகளினது தொகை முறைக்கு 8 ஆக எடுக்கும் 10 வேறுவேருன பொருள்களின் வரிசை மாற்றத் தொகைக்குச் சமனுகும். இது ${}^{10}P_8$ ஆகும். பின்னர் இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் வெறுமையாகும்படி அந்த 8 மனிதர்களையும் இருத்தும் வழிகளினது தொகையைக் காண்கின்ருேம். 10 ஆசனங்களுள் இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் 9 வழிகளிலே தேரப்படல் கூடும். இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் யாதும் ஒரு வழியிலே தேரப்பட்டபொழுது மீதியாயுள்ள 8 ஆசனங்களிலும் 8 மனிதர் 8 ! வழிகளில் ஒழுங்காக இருத்தப்படலாம். ஆகவே, இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் வெறுமையாகுமாறு அந்த 8 மனிதர்களையும் இருத்தும் வேறுவேருன வழிகளின் மொத்தம் $9\times 8!$. ஆகவே, எவையேனும் இரண்டு அடுத்துள்ள ஆசனங்கள் வெறுமையாகாதவாறு அம்மனிதரை இருத்தும் வழிகளினது தொகை ${}^{10}P_8-9\times 8!$.

$$=10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3-9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$$
$$=1451520.$$

பயிற்சி 31

1. 4 ஆண் பிள்ளைகளுள்ளும் 4 பெண் பிள்ளைகளுள்ளும் எவரேனும் இரு பெண்பிள்ளைகள் ஒருங்கு நிற்காதவாறு அப்பிள்ளைகளை ஒரு வரிசையிலே நிற்கச்செய்யக்கூடிய வழிகளினது தொகை 2880 எனக் காட்டுக.

2. வேறு வேறு வயதுடைய ஏழு மனிதர் ஒரு படக்காட்சிக்குப் பிரவேசச் சீட்டு வாங்குவதற்காக ஒரு தொடர் நிரையிலே நிற்க வேண்டியவர் ஆகின்ருர். அவருள் இளையவன் மூத்தவனுக்கு நேரே முன்னுக நிற்காதவாறு அவர் தம்மை ஒழுங்காக்கும் வழிகளினது தொகை 2520 எனக் காட்டுக.

3. A, B என்னும் இரு பட்டினங்களைத் தொடுத்துக்கொண்டு 5 தெருக்கள் இருக்கின்றன. மூன்று பேர் A யிலிருந்து B யிற்குச் சென்று பின் B யிலிருந்து A யிற்குத் திரும்பி வரவேண்டியவராய் இருக்கின்றனர். அவ்வாறு செய்கையில்,

ஒருவரேனும் ஒரே தெருவைச் செல்லுதலுக்கும் திரும்பி வருதலுக்கும் பயன்படுத்துதல் ஆகாது. அவருள் எவரேனும் இருவர் ஒரே தெருவைச் செல்வதற்குப் பயன்படுத்துதல் ஆகாது அவருள் எவரேனும் இருவர் ஒரே தெருவைத் திரும்பிவருதற்குப் பயன்படுத்துதலும் ஆகாது: ஆயின், அவர் பிரயாணஞ் செய்யக்கூடிய வழிகளினது தொகை 1440 எனக் காட்டுக,

4. 1,000, 10,000 என்பவற்றிற்கு இடையில் வேறுவேருன இலக்கங்களையுடைய; எத்தனை முழுவெண்கள் உண்டு ?

5. n புத்தகங்களுள் 3 தமிழிலுள்ளன; ஏனைய சிங்களத்திலுள்ளன; தமிழ்ப் புத்தகங்களுள் (3 உம் அன்றி) 2 ஒருங்கு இருக்குமாறு ஒரு தட்டின்மீது அவை ஒழுங்காக வைக்கப்படக்கூடிய வழிகளினது தொகை $6(n-3)\times(n-2)!$ எனக் காட்டுக.

6. n ஆண்களும் n பெண்களும் ஒரு வரிசையிலே நிற்கும்பொழுது அவருள் எவரேனும் இரு பெண்கள் ஒருங்கு நிற்காதவாறு ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய வழிகளினது தொகை $n!\,(n+1)!$ எனக் காட்டுக.

7. ஒவ்வொரு கோலும் வேறென்றுக்கு நேர் எதிராக இருக்குமாறு $2n$ கோல்கள் ஒருவட்ட வயலின் பரிதியில் வேறு வேறு புள்ளிகளிலே நாட்டப்பட்டுள்ளன. அவ்வயலுக்குள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மனிதன் ஓடத் தொடங்கித் தம்முள் எவையேனும் 2 ஒன்றுக்கொன்று நேர் எதிராயில்லாத n கோல்களைத் தொட்டபின் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவருகின்ருன். அவன் அவ்வாறு செய்யக்கூடிய வேறு வேறு வழிகளினது தொகை $2^n n!$ எனக் காட்டுக.

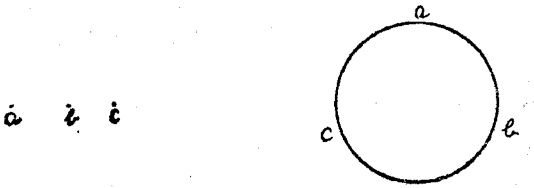
8. (வேறு வேருனவையாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பதின்றிய) n இலக்கங்கள் கொண்ட நேர் முழுவெண்களினது தொகை 10^n-10^{n-1} எனக் காட்டுக.

9. 10 வேறு வேருன கொடிகள் எம்மிடம் இருக்கும்பொழுது ஒன்றன் பின் ஒன்ருக நான்கு கொடிகளை உயர்த்தலாற் கொடுக்கக்கூடிய வேறு வேருன குறிப்புக்களினது தொகையைக் காண்க.

10. 3 பரிசுகளைப் பெற 12 போட்டியிடுவோர் இருக்கின்றனர். ஒருவனுக்கும் ஒன்றின் மேற்பட்ட பரிசு பெறத் தகுதி இல்லையெனின், அப்பரிசுகள் வழங்கப்படக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

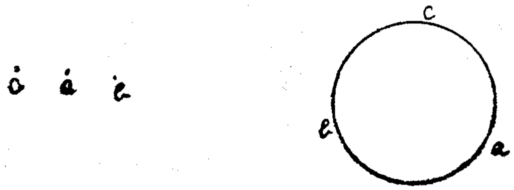
வட்டவொழுங்குகள்.

ஒரு நேர் கோட்டில் n வேறு வேருன பொருள்களினுடைய ஒழுங்குகளினது தொகை $n!$ ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒழுங்குகளை ஆராய்ந்தால், இது உண்மையன்று. அவ்விரு வகைகளிலும் உள்ள வேற்றுமை பின் வருமாறு விளக்கப்படலாம்.



ஒரு நேர் கோட்டில் a, b, c என்னும் மூன்று எழுத்துக்களின் ஒழுங்கையும் ஒரு வட்டத்தில் ஒத்த ஒழுங்கையும் ஆராய்க. a யானது b யையும், b யானது c யையும், c யானது a யையும் இடம் பெயர்க்கின்றன எனக் கொள்க.

அந் நேர்கோட்டில் ஒழுங்கு மாறியது ; ஆனால் அவ்வெழுத்துக்கள் அவ்வட்டத்தின்மீது வேறு வேறு நிலைகளில் இருக்கின்றபோதிலும்



அவ்வட்டத்தில் ஒழுங்கு மாறாது முன்போலவே இருக்கும். யாதும் ஓர் எழுத்தின் உண்மையான நிலை பற்றி நமக்கு அக்கறை இல்லை; அவ்வெழுத்துக்கள் புலனாகின்ற வரிசையில் மாத்திரம் அக்கறை கொள்கிறோம். ஆகவே, ஒரு வட்டத்தில் வேறு வேறான ஒழுங்குகளினது தொகை ஒரு நேர் கோட்டிலான ஒழுங்குகளினது தொகையிலுஞ் சிறிது.

ஒரு வட்டத்தில் n வேறு வேறான எழுத்துக்களை ஒழுங்காக வைக்கவேண்டும் எனக் கொள்க. அவ்வட்டத்தின்மீது ஓர் எழுத்தின் உண்மையான நிலை பொருளாகாதாதலால், அவ்வெழுத்துக்களுள் ஒன்றை அவ்வட்டத்தின்மீது நிலையாக்கி அதன்பின் மீதி $(n-1)$ எழுத்துக்களையுந் தம்முள் ஒழுங்காக இருக்கும்படி செய்யலாம். இதனை $(n-1)!$ வழிகளிற் செய்தல் கூடும்.

ஆகவே, ஒரு வட்டத்தில் n வேறு வேறான பொருள்களின் வரிசை மாற்றத் தொகை $(n-1)!$.

ஒரு வட்டத்தின்மீது ஒரு பொருளின் உண்மையான நிலையும் ஆராய்வுக்கு எடுக்கப்பட்டால், ஒழுங்குத் தொகை நேர் கோட்டொழுங்குகளிற் போல $n!$ ஆகும். உதாரணமாக n ஆள்கள் ஒரு வட்ட மேசையைச் சுற்றி இருத்தப்பட வேண்டியவராயிருக்க, அவ்வாசனங்களுக் கிடையில் வேறுபாடு இருந்தால், ஒழுங்குத் தொகை $n!$ ஆகும்.

இனி, n பொருள்கள் ஒரு வட்டத்தில் ஒழுங்காக வைக்கப்பட வேண்டியிருக்க, ஒழுங்கின் வலஞ்சுழிப் போக்குக்கும் இடஞ்சுழிப் போக்குக்கும் வேறுபாடு காணப்பட்டால், வேறு வேறான ஒழுங்குகளினது தொகை $\frac{1}{2}(n-1)!$ ஆகும். உதாரணமாக, வேற்றுமைப்பட்ட நிறங்களையுடைய n மணிகள் ஒரு கழுத்துமாலை ஆகுமாறு தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்க. அம்மணிகளின் ஒழுங்குகளில் வலஞ்சுழிப் போக்குக்கும் இடஞ்சுழிப் போக்குக்கும் இடையே வேற்றுமை யாதுமில்லை என்பது தெளிவு. ஆகவே, ஒரு கழுத்துமாலை ஆக்கப்படக்கூடிய வேறு வேறான வழிகளினது தொகை $\frac{1}{2}\times(n-1)!$.

பயிற்சி 32

1. n ஆண்களும் n பெண்களும் ஒரு வட்டமேசையினிடத்து அவருள் எவரேனும் இரு பெண்கள் ஒருங்கு இருக்காதவாறு இருத்தப்பட வேண்டியவர் ஆகின்றனர் ; குறிக்கப்பட்ட பெண் ஒருத்தியும் ஆண் ஒருவனும் ஒருங்கு இருக்க மாட்டார் ; ஆசனங்கள்பற்றி வேற்றுமை யாதும் இன்று. அவர்களை ஒழுங்காக்க கூடிய வழிகளினது தொகை $(n-2)\{(n-1)!\}^2$ எனக் காட்டுக.

2. ஐந்து ஆண்ளும் நாலு பெண்களும் ஒரு வட்டமேசையினிடத்து இருக்கின்றனர். ஆசனங்கள்பற்றியும் ஒழுங்கின் வலஞ்சுழி இடஞ்சுழிப் போக்குகள் பற்றியும் வேற்றுமை யாதும் காணப்படாதாயின், இரண்டின் மேற்பட்ட மனிதர் ஒருங்கு இருக்காதவாறு அவர்கள் இருத்தப்படக் கூடிய வேறு வேறு வழிகளினது தொகை 1440 எனக் காட்டுக.

எல்லாம் வேறு வேறாகாத பொருள்களின் ஒழுங்கு.

இப்பொழுது ஒரு நேர் கோட்டில் ஒழுங்கு செய்யப்படும் n பொருள்களினுடைய ஒழுங்குகளை அவை எல்லாம் வேற்றுமைப்படாதபொழுது ஆராய்வோம். வேறுவேறான ஒழுங்குகளினது தொகை $n!$ இலுஞ்சிறிது என்பது எளிதிற் புலனாகும். a, b, c, d...என்னும் எழுத்துக்களின் ஓர் ஒழுங்கு எம்மிடம் இருந்தால், இரண்டு எழுத்துக்களை ஒன்றோடொன்று மாற்றுகை இவ்வீர் எழுத்துக்களும் வேற்றுமைப்பட்டால் ஒரு புதிய ஒழுங்கையும், அன்றி அவை ஒற்றுமைப்பட்டால் அதே ஒழுங்கையுந் தரும்.

எம்மிடம் n பொருள்கள் உண்டு என்றும் அவற்றுள் p பொருள்கள் ஒற்றுமைப்பட ஏனைய எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்டு இருக்கின்றன என்றுங் கொள்க. x என்பது அவை எல்லாவற்றையும் ஒருங்கு எடுக்கும்போது ஆக்கப்படக்கூடிய வேறுவேறான ஒழுங்குகளின் மொத்தமாகுக. இந்த ஒழுங்குகளுள் ஒன்றை ஆராய்க. அந்த p ஒற்றுமைப்பட்ட பொருள்களும் ஏனையவற்றிலும் வேறான p வேற்றுமைப்பட்ட பொருள்களால் இடம் பெயர்க்கப்படுகின்றன எனக் கொள்க. இந்த p வேற்றுமைப்பட்ட பொருள்களானவை தம்முள் $p!$ வேறுவேறான வழிகளில் ஒழுங்காக்கப்படக் கூடியவை. ஆகவே அந்த x ஒழுங்குகளுள் ஒவ்வொன்றும் $p!$ வேறு வேறான ஒழுங்குகளைத் தரும். ஆகவே, எல்லா x ஒழுங்குகளும் $x.p!$ ஒழுங்குகளைத் தரும். இது எல்லாம் ஒருங்கு எடுக்கப்படும் n வேறு வேறான பொருள்களின் ஒழுங்குத் தொகையாகும் என்பது தெளிவு.

$$\therefore\ x.p! = n!$$

$$\therefore\ x = \frac{n!}{p!}.$$

$\therefore$ n பொருள்களுள் p பொருள்கள் ஒற்றுமையாகவும் ஏனையவெல்லாம் வேற்றுமையாகவும் இருக்கும்பொழுது அந்த n பொருள்களின் வேறு வேறான ஒழுங்குகளினது தொகை $\dfrac{n!}{p!}$.

அதுபோல, p பொருள்கள் ஓரினத்தனவாயும் q பொருள்கள் வேறோர் இனத்தனவாயுமிருக்க ஏனையவெல்லாம் வேற்றுமைப்பட்டால், ஒழுங்குகளினது தொகை $\frac{n!}{p!\,q!}$.

உதாரணம். " Commander " என்னுஞ் சொல்லிலுள்ள உயிரெழுத்துக்களின் வரிசை பேணப்படின், அச்சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் வேறுவேறான ஒழுங்குகளினது தொகையைக் காண்க.

அச்சொல்லில், 0, a, e என்னும் வரிசையிலே மூன்று உயிரெழுத்துக்கள் உண்டு. இவ்வரிசை பேணப்படவேண்டும். தந்த யாதும் ஓர் ஒழுங்கிலிருந்து மெய்யெழுத்துக்களினுடைய நிலைகளை மாற்றாது உயிரெழுத்துக்களை மாத்திரம் ஒன்றோடொன்று மாற்றுவதாற் புதிய ஒழுங்குகளை ஆக்கல் இயலாது என்பதே இதன் கருத்து. இது அம்மூன்று உயிரெழுத்துக்களும் மூன்று ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களாதற்கு ஒப்பாகும். எல்லாமாக 9 எழுத்துக்கள் உண்டு ; அவற்றுள் m என்னும் 2 எழுத்துக்கள் ஒற்றுமைப்பட்டுள்ளன. ஆகவே வேண்டிய ஒழுங்குத் தொகை 9 பொருள்களுள் 2 ஓரினத்தனவும் 3 வேறோரினத்தனவுமாக அந்த 9 பொருள்களின் ஒழுங்குத் தொகைக்குச் சமனாகும்.

$$\therefore \text{ ஒழுங்குத் தொகை } \frac{9\,!}{2\,!\,3\,!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{2\times3\times2}$$

$$=30240.$$

பயிற்சி 33

1. " Alliteration " என்னுஞ் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களினுடைய வேறுவேறான ஒழுங்குகளினது தொகையைக் காண்க.

2. " Prevarication " என்னுஞ் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களுள் (a) r என்னும் ஈரெழுத்துக்களும் ஒருங்கு வராதவாறும் (b) r என்னும் ஓர் எழுத்தும் i என்னும் ஓர் எழுத்தும் ஒருங்கு வருமாறும் உள்ள அச்சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்குத் தொகையைக் காண்க.

3. ஆசிய நாட்டு ஆலோசனைச் சபை ஒன்றிற்கு இலங்கையிலிருந்து 2 பிரதிநிதிகளும், இந்தியாவிலிருந்து 4 பேரும், பாக்கிஸ்தானிலிருந்து 3 பேரும், பேமாவிலிருந்து 3 பேரும் வந்திருக்கின்றனர். இப்பிரதிநிதிகள் கூட்ட ஒளிப்படம் ஒன்றிற்கு இருக்க, ஒரே நாட்டுப் பிரதிநிதிகளுக்கிடையே வேற்றுமை யாதுங் காணப்படாவாயின், அவர்களை இருத்தக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

ஒரே நாட்டுப் பிரதிநிதிகள் ஒருங்கு இருந்தால், அவர்களை இருத்தக் கூடிய வழிகளினது தொகையையுங் காண்க.

4. 2, 3, 4 என்னும் இலக்கம் மூன்றையும் ஒருங்கு பயன்படுத்தி 5 இலக்கங்களைக் கொண்ட எத்தனை முழுவெண்களை ஆக்கலாம்?

5. பூச்சியமல்லாத இலக்கங்கள் எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்திக் கட்டுப்படுத்தாத நிலைகளையுடைய 2, 4 என்னும் இலக்கங்களுக்கு இடையில் யாதும் ஓரிடத்தில் 3 என்னும் இலக்கம் வருமாறு வேறுவேறான இலக்கங்களையுடைய எத்தனை முழுவெண்கள் ஆக்கக்கூடும்?

6. n மாபிள்களுள் p ஒரு நிறமும் ஏனைய வேறுவேறு நிறமும் உள்ளனவாயிருக்க அவற்றை ஒரு வட்டத்தில் ஒழுங்காக வைக்கும்பொழுது வலஞ்சுழிப் போக்குக்கும் இடஞ்சுழிப் போக்குக்கும் வேறுபாடு காணப்படுமாயின் அவை வைக்கப்படக்கூடிய ஒழுங்குகளினது தொகை $\frac{(n-1)!}{p!}$ எனக் காட்டுக.

சேர்மானம்.

a, b, c, d என்னும் நான்கு வேறுவேறான எழுத்துக்களை ஆராய்க இந்நான்கு எழுத்துக்களைக் கொண்டு ஆக்கக்கூடிய வேறுவேறான மூன்று எழுத்துக் கூட்டங்களுள் யாதுமொரு கூட்டத்திலுள்ள எழுத்தொழுங்கைக் கவனிக்காதவிடத்து அக்கூட்டங்கள் abc, abd, acd, bcd என்பனவாகும். அங்கு 4 கூட்டங்களே உண்டு ; அதாவது தடவைக்கு 3 ஆக எடுக்கப்படும் 4 வேறுவேறு பொருள்களின் சேர்மானத்தொகை 4 ஆகும்.

தடவைக்கு r ஆக எடுக்கப்படும் n வேறுவேறு பொருள்களின் சேர்மானத் தொகை n பொருள்களைக்கொண்டு ஆக்கக்கூடிய r பொருள்களினுடைய வேறுவேறான கூட்டங்களினது தொகையாகும். அது n, r என்பன முழுவெண்களாக அவற்றுள் n என்பது r இலுஞ் சிறிதாகாத போது ${}^nC_r$ ஆற் குறிக்கப்படும்.

$${}^4C_3=4 \text{ எனக் கண்டோம்.}$$

இப்பொழுது n, r என்பனவற்றினுடைய தந்த பெறுமானங்களுக்கு ${}^nC_r$ என்பதைக் கணிக்க உதவுஞ் சூத்திரம் ஒன்றைப் பெறுவோம்.

${}^nC_r$ இற்குச் சூத்திரம்.

தடவைக்கு r ஆக எடுக்கப்படும் n வேறு வேறு பொருள்களினுடைய வேறு வேறு வரிசை மாற்றமானவை r பொருள்களினுடைய இயலத்தக்க கூட்டங்கள் எல்லாவற்றையும் ஆக்கி அதன்பின் ஒவ்வொரு கூட்டத்திலும் உள்ள பொருள்களை இயலத்தக்க வழிகள் எல்லாவற்றையும்பற்றி ஒழுங்குபடுத்தலாற் பெறப்படும். r வேறுவேறு பொருள்களானவை தம்முள் ஒழுங்காக்கப்படக்கூடிய வழிகளினது தொகை $r\,!$

$$\therefore \quad {}^nC_r\times r!={}^nP_r.$$

$$\therefore \quad {}^nC_r=\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

வேறொரு வழி.

அந்த n வேறுவேறான பொருள்கள் $a_1, a_2,\ldots,a_n$ என்னும் n வேறுவேறான எழுத்துக்களாற் குறிக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்க. ஒவ்வொன்றும் r எழுத்துக்களுள்ள ${}^nC_r$ கூட்டங்கள் எல்லாம் கடதாசித் தாளில் எழுதப்பட்டால் எழுதப்பட்ட எழுத்துக்களின் மொத்தம் $r\times{}^nC_r$

ஆகும். இப்போது இவ்வெண்ணை வேறொரு வழியாற் **கணிப்போம்.** யாதும் ஓர் எழுத்து (a_1 என்க) எழுதப்படும் முறைத்தொகை இவ்வெழுத்து இருக்குங் கூட்டங்களினது தொகைக்குச் சமனாகும். a_1 என்னும் எழுத்தைத் தவிர்த்து மீதி $(n-1)$ எழுத்துக்களிலிருந்து இயலத்தக்க $(r-1)$ எழுத்துக் கூட்டங்கள் எல்லாவற்றையும் ஆக்கி, அதன் பின் ஒவ்வொரு கூட்டத்திலும் a_1 என்னும் எழுத்தை அமைத்தோமாயின், தடவைக்கு r ஆக எடுக்கப்படும் n ஆரம்ப எழுத்துக்களின் சேர்மானங்கள் எல்லாவற்றுள்ளும் a_1 என்னும் எழுத்தைக் கொண்டனவற்றைப் பெறுவோம். ஆகவே, a_1 என்னும் எழுத்து ${}^{n-1}C_{r-1}$ தடவை எழுதப்படும். அதேபோலப் பிறவெழுத்துக்கள் ஒவ்வொன்றிற்குஞ் செய்யலாம். ஆகவே, எழுதப்பட்ட எழுத்துக்களின் மொத்தம் $n \times {}^{n-1}C_{r-1}$ என்பதற்குச் சமன்.

$$\therefore \quad r \times {}^{n}C_{r} = n \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

$n \geq r$ ஆக, இது n, r என்பனவற்றினுடைய நேர் முழுவெண் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும்.

$$\therefore \quad {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}$$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}^{n-(r-2)}C_{r-(r-2)} = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_{1}.$$

அன்றியும் ${}^{n-r+1}C_1$ என்பது தெளிவாய் $n-r+1$ இற்குச் சமன்.

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ (n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots 1}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

சிறப்பாக $\qquad {}^{n}C_{n} = 1.$

மேலுள்ள சூத்திரத்தாற் சரிபிழை பார்க்கப்படக்கூடிய பின்வரும் முடிபுகளானவை நேரடியாய் நிறுவப்படக்கூடியவை.

$${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$${}^{n}C_{r} = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

n பொருள்களிலிருந்து எடுக்கும் r பொருட்கூட்டம் ஒவ்வொன்றிற்கும் $(n-r)$ பொருட்கூட்டம் ஒன்றை விடுகின்றதென்பதை நினைவுகூர்ந்தால் (1) எளிதிற் புலனாகும்.

(2) ஐ நிறுவுதற்கு ஓரெழுத்து a யாயுள்ள n வேறுவேறான எழுத்துக்கள் எம்மிடம் உண்டெனக் கொள்க. இந்த n எழுத்துக்களிலிருந்து வேறுவேறான r எழுத்துக் கூட்டங்களை ஆக்கினால் a என்பது இருக்குங் கூட்டங்களினது தொகை ${}^{n-1}C_{r-1}$. அதற்குக் காரணம் இது தடவைக்கு $(r-1)$ எழுத்துக்களாக எடுக்கப்படும் மீதி $(n-1)$ எழுத்துக்களினுடைய கூட்டங்களினது தொகைக்குச் சமன் என்பதே. a என்னும் எழுத்து இல்லாத கூட்டங்களானவை r எழுத்துக்களை மீதி $(n-1)$ எழுத்துக்களிலிருந்து தேர்தலால் ஆக்கப்படும். ஆகவே, a என்னும் எழுத்து இல்லாத கூட்டங்களினது தொகை ${}^{n-1}C_r$.

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r}.$$

உதாரணம் 1. ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள 10 பேர்கள் 4 பேர்கொண்ட வேறுவேறு கூட்டங்களாக வேறுவேறு நாள்களில் ஒரு நாடகசாலைக்குச் செல்லத் துணிகின்றனர். அவர்கள் எத்தனை நாள்களுக்குச் செல்வார்கள்? ஒவ்வொருவரும் எத்தனை காட்சி காணக்கூடும்?

அவர்கள் செல்லும் முறைத் தொகை தடவைக்கு 4 ஆக எடுக்கப்படும் 10 வேறுவேறு பொருள்களின் சேர்மானத் தொகைக்குச் சமன்.

$$\text{இது} = {}^{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210.$$

∴ ஒவ்வொருவருஞ் செல்லும் முறைத் தொகை

$${}^{9}C_{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84.$$

உதாரணம் 2. 9 ஆண்களிலிருந்தும் 5 பெண்களிலிருந்தும் 7 பேர் கொண்ட ஓர் அலுவற்குழு தேரப்படவேண்டும்.

(*a*) 4 ஆண்களும் 3 பெண்களும் தேரப்பட்டால்,

(*b*) பெண் ஒருத்தியாயினுந் தேரப்பட்டால் அவ்வலுவற்குழு ஆக்கப்படக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

(*a*) 9 ஆண்களிலிருந்தும் 4 பேரைத் தேரும் வழிகளினது

$$\text{தொகை } {}^{9}C_{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2}$$

$$= 126.$$

5 பெண்களிலிருந்தும் 3 பேரைத் தேரும் வழிகளினது

$$\text{தொகை } {}^{5}C_{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 10.$$

ஆண்களைத் தேரும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் ஒக்கப் பெண்களைத் தேருதற்கு 10 வழிகள் உண்டு.

ஆகவே 4 ஆண்களையும் 3 பெண்களையும் தேரும் வேறுவேறு வழிகளினது தொகை $126 \times 10 = 1260$.

(*b*) எல்லாமாக 14 பேர் உண்டு. அவருள் ஒரு பெண்ணுயினும் உட்பட 7 பேரைத் தேர்தல் வேண்டும். கட்டுப்பாடு யாதுமின்றி 7 பேர் தேரப் படக்கூடிய வழிகளினது தொகை

$$= \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 3432.$$

இது ஒரு பெண்ணுயினும் எடுக்கப்படாத வழிகளினது தொகையை உட் படுத்தும். பெண்ணொருத்தியும் எடுக்கப்படாது விட்டால் 7 பேர்க் கூட்டம் முழுவதும் 9 ஆண்களிலிருந்து தேரப்படல் வேண்டும். ஆகவே, பெண் ணொருத்தியையும் உட்படுத்தாதவாறு அவ்வலுவற்குழுவை ஆக்கும் வழி களினது தொகை ${}^9C_7 = {}^9C_2$.

$$= \frac{9 \times 8}{2} = 36.$$

ஆகவே, பெண்ணொருத்தியையாயினும் உட்படுத்துமாறு அவ்வலுவற் குழுவை ஆக்கும் வழிகளினது தொகை $= 3432 - 36 = 3396$.

பயிற்சி 34

1. ஒரு தளத்தில் 15 புள்ளிகள் உண்டு ; அவற்றுள் 6, ஏனைய 9 புள்ளிகளுள் யாதொன் றிற்குமூடாகச் செல்லாத ஒரே நேர் கோட்டில் உள்ளன ; இந்த 9 புள்ளிகளுள் எவையேனும் மூன்று ஒரே நேர் கோட்டில் இல்லை. இப்புள்ளிகளைத் தொடுத்தலால் 91 வேறுவேறு நேர் கோடுகள் ஆக்கப்படலாமென்றும், தம்முச்சிகள் இந்த 15 புள்ளிகளுள் இருக்கின்ற முக் கோணிகள் 435 ஆகுமென்றுங் காட்டுக.

2. 10 வேறுவேறு புத்தகங்களானவை 4 புத்தகங்கொண்ட கட்டாயும் 6 புத்தகங்கொண்ட கட்டாயும் ஆக்கப்படும் வழிகளினது தொகை 210 எனக் காட்டுக. அவை ஒவ்வொன்றும் 5 புத்தகங்கொண்ட இரு கட்டுகளாக 126 வழிகளிற் செய்யப்படக்கூடுமெனக் காட்டுக.

3. 8 ஆண்களிலிருந்தும் 4 பெண்களிலிருந்தும் 5 பேருள்ள ஓர் அலுவற் குழுவை ஆக்குமிடத்து அக்குழுவிற் பெண் ஒருத்தியும் இல்லாதபொழுது குறிக்கப்பட்ட ஆண் ஒருவன் சேவைசெய்ய மறுத்தால் எத்தனை வழிகளாக அக்குழு ஆக்கப்படலாம் எனக் காண்க. (விடை 757)

4. ஒரு பையிற்குள் 6 வெண்மாபிள்களும் 5 செம்மாபிள்களும் உண்டு. அப்பையிலிருந்து 4 மாபிள்களை ஒரு மனிதன் எடுக்கக்கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க. 2 வெண்மாபிள் களையும் 2 செம்மாபிள்களையும் அவன் எடுக்கக்கூடிய வழிகளினது தொகையையுங் காண்க.

ஆயின் அம்மனிதன் மாபிள்களுள் ஒன்றையும் பாராது அவற்றுள் 4 ஐ எடுக்கும்போது 2 வெண்மையாயும் மற்றை இரண்டு செம்மையாயும் இருக்கும் நேர்தகவு 11 இல் 5 எனக் காட்டுக.

5. ஒரு நகரசபையிலே தலைவர் பதவித் தேர்வொன்றில் 2 அபேட்சகரும் 12 தேர்வோரும் இருந்தனர். வென்ற அபேட்சகனுக்கு 2 வாக்குக்கள் கூடுதலாகக் கிடைத்தன. அவ்வாக்குரிமை 792 வேறுவேறான வழிகளுள் யாதுமொன்றால் வழங்கப்பட்டிருக்கலா மெனக் காட்டுக.

6. 10 மக்களினுடைய வயதுகள் 10 அடுத்துவரும் முழுவெண்களாற் குறிக்கப்பட்டிருக்கின் றன. அவருள் 5 பேருள்ள ஒரு கூட்டத்தில் எவரேனும் இருவருடைய வயது வித்தியாசம் 8 இற்குச் சமனாகாதவாறு அக்கூட்டத்தை ஆக்கும் வழிகளினது தொகை 146 எனக் காட்டுக.

7. 9 இல்லங்களுக்குச் சொந்தக்காரன் ஒருவன் பிள்ளை ஒன்றுக்கு மூன்றாகத் தன்னுடைய மூன்று பிள்ளைகளுக்கும் அவற்றை நன்கொடையாக வழங்க விரும்புகிறான். அந்நன்கொடை வழங்கப்படக்கூடிய வேறு வேறு வழிகளினது தொகை 1680 எனக் காட்டுக. யாதொரு பங்கிற்குஞ் சொந்தம் பற்றி வேறுபாடு யாதுஞ் செய்யப்படவில்லையெனின் அந்நன்கொடை வழங்கப்படும் வழிகளினது தொகை 280 எனக் காட்டுக.

8. *m*, *n* என்பன 3 இலுஞ் சிறியனவாகாத நேர்முழுவெண்களாயிருக்கும்போது யாதொரு சூத்திரத்தையும் மேற்கொள்ளாது

$${}^{m+n}C_3 = {}^mC_3 + {}^mC_2 . {}^nC_1 + {}^mC_1 . {}^nC_2 + {}^nC_3$$

எனக் காட்டுக.

9. 10 ஆண்களிலிருந்தும் 10 பெண்களிலிருந்தும் கலந்த இரட்டைத் தெனிசு விளையாட்டொன்றிற்கு விளையாடுவோர் தேரப்படவேண்டியவராய் இருக்கின்றனர். அவ்விரண்டு எதிர்ப்பக்கங்களும் ஆக்கப்படத்தக்க வேறுவேறு வழிகளினது தொகையைக் காண்க. (விடை 4050)

10. 10 ஆண்களும் 10 பெண்களும் ஒரு வியாபாரத் தாபனத்திலுள்ள ஆறு வேலைகளுக்கு மனுக்கொடுக்கின்றார்கள். அவ்வேலைகள் 3 இற்குக் குறையாமல் ஆண் மக்களாலே நிரப்பப்பட வேண்டுமெனின், அந்த 6 வேலைகளுங் கொடுக்கக்கூடிய வேறுவேறு வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

எல்லாம் வேறுபடாத பொருள்களினுடைய வரிசை மாற்றங்களுஞ் சேர் மானங்களும்.

முறைக்கு *r* ஆக எடுக்கப்படும் *n* பொருள்களினுடைய வரிசைமாற்றச் சேர்மானத் தொகைகளாகிய

$n(n-1)\ldots(n-r+1)$ $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$ என்னுங் கோவைகள் அந்த *n* பொருள்கள் எல்லாம் வேறு வேறாகும்பொழுதே உண்மையாகும். எல்லாப் பொருள்களும் வேறு வேறாகாதபொழுது முறைக்கு *r* ஆக எடுக்கப் படும் *n* பொருள்களினுடைய ஒழுங்குத் தொகைக்கோ கூட்டத் தொகைக்கோ எளிய கோவை எதும் கொடுத்தல் இயலாது.

சில எண்ணுதாரணங்களை மாத்திரம் இங்கு ஆராய்வோம்.

உ-ம். "Association" என்னுஞ் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களை முறைக்கு நாலாக எடுக்கவரும் வேறு வேறான கூட்டத் தொகையையும் வேறுவேறான ஒழுங்குத் தொகையையுங் காண்க.

இதன்கண் 2 எழுத்துக்கள் *a* யாயும் 2 எழுத்துக்கள் *s* ஆயும் 2 எழுத்துக்கள் *o* ஆயும் 2 எழுத்துக்கள் *i* ஆயும் 3 எழுத்துக்கள் வேறு வேறானவையாயும் இருக்கின்றன.

அவற்றிலிருந்து ஆக்கப்படும் 4 எழுத்துக் கூட்டமொன்றில் இருக்கக் கூடியவை :

(a) ஓரினத்தில் 2 எழுத்துக்களும் வேறோர் இனத்தில் 2 எழுத்துக் களும்,

(b) 2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் வேறு 2 வேற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும்,

(c) எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்ட 4 எழுத்துக்கள்.

2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் வேறு 2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் உள்ள ஒரு கூட்டத்தை ஆக்குதற்கு 4 தொகுதிகளிலிருந்து ஒற்றுமைப் பட்ட எழுத்துக்களினுடைய 2 தொகுதிகளைத் தேர்தல் வேண்டும். ஆகவே, இவ்வினத்துக் கூட்டங்களினது தொகை ${}^4C_2$, அதாவது 6.

2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் 2 வேற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் உள்ள ஒரு கூட்டத்தை ஆக்குதற்கு ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களினது தொகுதியை நாம் 4 வழிகளிலே தேரலாம். ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக் களின் ஒரு தொகுதி இந்த வழிகளுள் யாதும் ஒன்றாலே தேரப்பட்ட பொழுது, தேர்தற்பொருட்டு 6 வேறு வேறான இனங்கள் எம்மிடம் உண்டு ; ஆயின், 2 வேறுவேறான எழுத்துக்கள் ${}^6C_2$ அதாவது 15 வழிகளிலே தேரப்படலாம். ஆகவே, 2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களையும் 2 வேற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களையும் உடைய கூட்டங்களினது தொகை 4×15 அதாவது 60.

4 வேறு வேறான எழுத்துக்களின் கூட்டம் ஒன்றை ஆக்குதற்கு, தேர்தற் பொருட்டு 7 வேறு வேறான இனங்கள் எம்மிடம் உண்டு ; ஆயின், அக் கூட்டம் ${}^7C_4$, அதாவது 35 வழிகளில் ஆக்கப்படலாம்.

ஆகவே, தந்த சொல்லினுடைய எழுத்துக்களிலிருந்து ஆக்கப்படக்கூடிய வேறு வேறான 4 எழுத்துக் கூட்டங்களினது தொகை $6+60+35$ அதாவது 101.

ஒழுங்குகளினது தொகையைக் காண்பதற்கு வேறு வேறான அம்மூன்று கூட்டவினங்களுந் தனித்தனி ஆராயப்படும்.

ஓரினத்தின் 2 எழுத்துக்களும் வேறோரினத்தின் 2 எழுத்துக்களுமுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டமும் $\dfrac{4!}{2!\,2!}$ ஒழுங்குகளைத் தரும்.

ஆகவே, கூட்டங்கள் 6 இலுமிருந்து பெறப்படும் ஒழுங்குத் தொகை

$$\frac{6\times4\times3\times2}{2\times2}=36.$$

2 ஒற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் 2 வேற்றுமைப்பட்ட எழுத்துக்களும் உள்ள ஒவ்வொரு கூட்டமும் $\dfrac{4\,!}{2\,!}$ ஒழுங்குகளைத் தரும்.

ஆகவே, அந்த 60 கூட்டங்களிலும் இருந்து பெறப்படும் ஒழுங்குகளினது தொகை $\dfrac{60\times4\times3\times2}{2}=720.$

4 வேறு வேறான எழுத்துக்களின் ஒவ்வொரு கூட்டமும் 4 ! ஒழுங்குகளைத் தரும்.

ஆகவே, அந்த 35 கூட்டங்களினுமிருந்து பெறப்படும் ஒழுங்குகளின் தொகை $35\times4\times3\times2=840.$

ஆகவே, தந்த சொல்லினுடைய எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு 4 ஆக எடுக்க வரும் ஒழுங்குகளினது மொத்தம் $36+720+840$

$$=1{,}596.$$

பயிற்சி 35

1. " Maladministration " என்னுஞ் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு 4 ஆக எடுக்க வரும் வேறுவேறான ஒழுங்குகளினது தொகையைக் காண்க.

2. 4 வெண்மாபிள்களும் 4 செம்மாபிள்களும் உள்ள கூட்டம் ஒன்றிலிருந்து 5 மாபிள்களை எடுத்து ஒரு வட்டத்தில் ஒழுங்காக வைக்கக் கூடிய வழிகளினது தொகையைக் காண்க.

ஈருறுப்புத் தேற்றம்.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்கும்பொழுது a, b, என்பன எவையேனும் இரண்டு மெய்யெண்களைக் குறிக்க, ஒவ்வொன்றும் $(a+b)$ ஆகிய n காரணிகளின் பெருக்கத்தை ஆராய்க,

அதாவது $(a+b)(a+b)(a+b)$ . . . . . n காரணிகள் வரைக்கும்,
அதாவது $(a+b)^n$.

அப்பெருக்கத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் அந்த n காரணிகள் ஒவ்வொன்றி லுமிருந்து a, b என்னும் எழுத்துக்களுள் ஒன்றை எடுத்து அவற்றை ஒருங்கு பெருக்குதலாற் பெறப்படும். அந்த n காரணிகள் ஒவ்வொன்றிலு மிருந்து ஓர் எழுத்தைத் தேரும் பல வழிகளுக்கு அப்பலவாகிய உறுப்புக் கள் ஒத்தனவாயிருக்கும். n காரணிகள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து a என்னும் எழுத்தை எடுக்கின்றோம் எனக் கொள்க. இது ஒரு வழி யாலேயே செய்யப்படக் கூடும் ; ஆயின், அப்பெருக்கத்தில் 1 ஐக் குணக மாகவுள்ள a^n என்னும் ஓர் உறுப்பு இருக்கும். a என்பதை $(n-1)$ காரணிகளிலிருந்தும் b என்பதை மீதிக் காரணியிலிருந்தும் எடுக் கின்றோமெனக் கொள்க. b யை முதலாங் காரணியிலிருந்தும் a யை ஏனை $(n-1)$ காரணிகளிலிருந்தும் எடுக்கலாம். அன்றி b என்பதை இரண்டாங் காரணியிலிருந்தும் a என்பதை மீதி $(n-1)$ காரணிகளிலிருந்தும் இவ்வாறே பிறவற்றையும் எடுக்கலாம். தேர்தற்கு n காரணிகள் இருத்தலால் b என்னும் எழுத்து ${}^nC_1$ வழிகளிலே

தேரப்படலாம். ஆகவே, $a^{n-1}b$ என்னும் உறுப்பு அப்பெருக்கத்தில் ${}^nC_1$ முறை வரும்; அதாவது, அப்பெருக்கத்தில் $a^{n-1}b$ என்பதன் குணகம் ${}^nC_1$ ஆகும்.

b என்பதை இரண்டு காரணிகளிலிருந்தும் a என்பதை மீதி $(n-2)$ காரணிகளிலிருந்தும் எடுக்கின்றோம் எனக் கொள்க. இது ${}^nC_2$ வழிகளிற் செய்யப்படக்கூடும். ஆகவே, அப்பெருக்கத்தில் $a^{n-2}b$ என்னும் உறுப்பு ${}^nC_2$ முறை வரும்; அதாவது, அப்பெருக்கத்தில் $a^{n-2}b$ என்பதன் குணகம் ${}^nC_2$ ஆகும்.

பொதுவாக, b என்னும் எழுத்தை r காரணிகள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து a என்னும் எழுத்தை மீதி $(n-r)$ காரணிகளிலிருந்தும் எடுக்கின்றோமெனக் கொள்க. இது ${}^nC_r$ வழிகளிற் செய்யப்படக்கூடும். ஆகவே, அப்பெருக்கத்தில் $a^{n-r}b^r$ என்பதன் குணகம் ${}^nC_r$ ஆகும். இறுதியாக, b என்பதை n காரணிகள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து எடுத்தோமாயின், 1 என்னுங் குணகத்தோடு b^n என்னும் உறுப்பைப் பெறுவோம்.

∴ அப்பெருக்கம்,

$$a^n+{}^nC_1a^{n-1}b+{}^nC_2a^{n-2}b^2+\ldots+{}^nC_ra^{n-r}b^r+\ldots+b^n$$

என்பதற்குச் சமன்.

இவ்வண்ணம், n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்கும்போது,

$$(a+b)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}b+\ldots+{}^nC_ra^{n-r}b^r+\ldots b^n.$$

அப்பெருக்கத்தின் விரியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும்

${}^nC_ra^{n-r}b^r$ என்னும் வடிவினது.

இங்கு r என்பது பூச்சியமாகும் அல்லது n இலுஞ் சிறிதாயோ சமனாயோ உள்ள ஒரு நேர் முழுவெண்ணாகும்.

${}^nC_0$ என்பது 1 ஆக எடுக்கப்பட்டால், முதலாம் உறுப்பு $r=0$ என்பதற்கு ஒத்ததாகும். இரண்டாம் உறுப்பு $r=1$ என்பதற்கும் இவ்வாறே பிறவும் ஒத்தனவாகும். ஈற்றுறுப்பு $r=n$ என்பதற்கு ஒத்ததாகும். அவ்விரியில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் இருக்கும்; $(r+1)$ ஆம் உறுப்பு ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ ஆகும்.

Σ என்னுங் குறியீடு தொடர்க் கூட்டலைக் குறிக்குமாயின்,

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{r=n}{}^nC_ra^{n-r}b^r$$

என எழுதுகின்றோம்.

இந்த முடிபு a, b என்னும் இரு மூலங்களைக் குறிக்கின்றமையால் ஈருறுப்புத் தேற்றமெனப்படும்.

இப்போது அத்தேற்றத்தைத் தொகுத்தறி முறையாலே நிறுவுவோம்.

$$(a+b)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}b+\ldots+{}^nC_ra^{n-r}b^r+\ldots+b^n.$$

வலப்பக்கத்தில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் இருக்கின்றன. $n=1$ ஆகும்பொழுது இரண்டாம் உறுப்பு ஈற்றுறுப்பாக, அங்கு இரண்டு உறுப்புக்கள் இருக்கும். ஆகவே, $n=1$ ஆகும்பொழுது, முடிபு $(a+b)^1=a+b$ என்பதாகும். இது உண்மை.

இனி, $n=p$ ஆகும்பொழுது அம்முடிபு உண்மையாகுமெனக் கொள்க.

ஆயின் $(a+b)^p=a^p+{}^pC_1a^{p-1}b+\ldots+{}^pC_ra^{p-r}b^r+\ldots+b^p$.

இரு பக்கங்களையும் a, b என்பனவற்றாலே தொடர்ச்சியாகப் பெருக்க,

$$a(a+b)^p=a^{p+1}+{}^pC_1a^pb+\ldots+{}^pC_ra^{p+1-r}b^r+\ldots+ab^p,$$

$$b(a+b)^p=\qquad a^pb+\ldots+{}^pC_{r-1}a^{p+1-r}b^r+\ldots\ldots+b^{p+1}$$

என்பன.

இங்கு ஒத்த உறுப்புக்களை ஒன்றின்கீழ் ஒன்றாக எழுதியுள்ளோம்.

ஒருங்கு கூட்ட

$$(a+b)(a+b)^p=a^{p+1}+({}^pC_1+1)\,a^pb+\ldots+({}^pC_r+{}^pC_{r-1})a^{p+1-r}b^r+\ldots+b^{p+1}.$$

இதற்குமுன் ${}^nC_r={}^{n-1}C_{r-1}+{}^{n-1}C_r$ எனக் கண்டுள்ளோம்.

$\therefore\ {}^{p+1}C_r={}^pC_{r-1}+{}^pC_r.$

$\therefore\ (a+b)^{p+1}=a^{p+1}+{}^{p+1}C_1a^pb+\ldots+{}^{p+1}C_ra^{p+1-r}b^r+\ldots+b^{p+1}.$

அதாவது $n=p+1$ ஆகும்பொழுது அத்தேற்றம் உண்மையாகும்.

ஆகவே, $n=p$ ஆகும்பொழுது அத்தேற்றம் உண்மையானால், $n=p+1$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மையாகும்.

$n=1$ ஆகும்பொழுது அது உண்மை.

∴ $n=2$ ஆகும்பொழுதும் அது உண்மை.

∴ n என்பது யாதும் ஒரு நேர் முழுவெண் பெறுமானமுடையதாயிருக்கும்பொழுது இவ்வாறே செய்யலாம்.

உதாரணம் 1.

$(2-3x)^5$ என்பதன் விரியைக் காண்க.

$$(2-3x)^5=2^5+{}^5C_12^4(-3x)+{}^5C_22^3(-3x)^2+{}^5C_32^2(-3x)^3+{}^5C_42(-3x)^4+(-3x)^5$$

$$=32-240x+720x^2-1080x^3+810x^4-243x^5.$$

உதாரணம் 2.

$\left(2x+\dfrac{3}{x^3}\right)^{10}$ இன் விரியில் x^{-6} இன் குணகத்தைக் காண்க.

13—R 11681 (1/66)

r என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயோ பூச்சியமாயோ இருந்தால் அவ்விரியிலுள்ள யாதும் ஓர் உறுப்பு

$${}^{10}C_r(2x)^{10-r}\left(\frac{3}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r 2^{10-r}3^r.x^{10-4r}$$

என்னும் வடிவினதாகும்.

x^{-6} என்பதை அகப்படுத்தும் உறுப்பு $10-4r=-6$, அதாவது $x=4$ ஆகும்பொழுதே பெறப்படும்.

x^{-6} என்பதன் குணகம் ${}^{10}C_4.2^6.3^4$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}.2^6.3^4$$

$$=210\times2^6\times3^4.$$

உதாரணம் 3.

$(2+\sqrt{3})^4$ என்பதன் முழுவெண் பகுதியைக் காண்க.

$$(2+\sqrt{3})^4=2^4-{}^4C_1 2^3\sqrt{3}+{}^4C_2.2^2(\sqrt{3})^2+{}^4C_3 2(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^4.$$

$$(2-\sqrt{3})^4=2^4-{}^4C_1 2^3\sqrt{3}+{}^4C_2.2^2(\sqrt{3})^2-{}^4C_3 2(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^4.$$

$$\therefore\quad (2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4=2\left(2^4+\frac{4\times3}{2}.2^2.3+3^2\right)$$

$$=194.$$

$(2-\sqrt{3})$ என்பது 1 இலுஞ் சிறியதாய் நேராகும்.

$\therefore$ $(2-\sqrt{3})^4$ என்பது 1 இலுஞ் சிறிதாய் நேராகும்.

$\therefore$ $(2+\sqrt{3})^4$ என்பதன் முழுவெண் பகுதி$=193$.

$x>0$ ஆகும்பொழுது, $(1+x)^n$ இன் மிகப்பெரிய உறுப்பு.

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots+{}^nC_rx^r+\ldots+x^n$$

$x>0$ ஆயின், எல்லா உறுப்புக்களும் நேராகும்.

T_r என்பது அவ்விரியிலுள்ள r ஆம் உறுப்பாகுக.

$$T_{r+1}={}^nC_rx^r,\quad T_r={}^nC_{r-1}x^{r-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots1}\times\frac{(r-1)(r-2)\ldots1}{n(n-1)\ldots(n-r+2)}x$$

$$=\frac{n-r+1}{r}x.$$

$$\therefore\quad \frac{n-r+1}{r}x>1 \text{ எனின்,}\quad T_{r+1}>T_r.$$

$$\therefore\quad \frac{n-r+1}{r}x<1 \text{ எனின்,}\quad T_{r+1}<T_r.$$

$$\therefore\quad \frac{n-r+1}{r}x=1 \text{ எனின்,}\quad T_{r+1}=T_r.$$

இப்பொழுது, $(n+1)x>r(x+1)$ எனின், அதாவது, $r<\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ எனின்

$$\frac{n-r+1}{r}x>1.$$

அதுபோல, $r>\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ எனின், $\dfrac{n-r+1}{r}x<1.$

$r=\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ எனின், $\dfrac{n-r+1}{r}x=1.$

ஆகவே, r என்பது $\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ இலுஞ் சிறிதாய், அன்றிப் பெரிதாய் அன்றி அதற்குச் சமனுய் இருத்தலுக்கேற்ப T_{r+1} என்பது T_r இலும் பெரிதாய், அன்றிச் சிறிதாய், அன்றி அதற்குச் சமனுய் இருக்கும்.

$\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ என்பது ஒரு முழுவெண் அன்று எனக் கொள்க.

ஆயின், r என்பது $\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ என்பதற்கு ஒரு போதுஞ் சமனுகாது.

p என்பது $\dfrac{(n+1)x}{x+1}$ என்பதன் முழுவெண் பகுதியாகுக. (பூச்சியமும் ஒரு முழுவெண்ணுகக் கொள்ளப்படும்).

$r\leqslant p$ எனின், $r<\dfrac{(n+1)x}{x+1}$;

$r>p$ எனின், $r>\dfrac{(n+1)x}{x+1}$.

$\therefore$ $r\leqslant p$ யாயுள்ள r இன் யாதும் ஒரு முழுவெண் பெறுமானத்திற்கு

$$T_{r+1}>T_r.$$

$r>p$ யாயுள்ள r இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$$T_{r+1}<T_r.$$

$x>0$ ஆதலின், $\dfrac{(n+1)x}{x+1}<n+1.$

$$\therefore\ p\leqslant n.$$

$p=n$ எனின், $r \leqslant n$ ஆயுள்ள எல்லா r இற்கும் $T_{r+1}>T_r$. அவ்விரியில் $(n+1)$ உறுப்புக்களே இருக்கின்றமையால், அவ்விரியிலே முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புந் தனக்கு முன்னுள்ள உறுப்பிலும் பெரிதாகும்; அதாவது, அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக முதலிலிருந்து இறுதி வரைக்குங் கூடும்; ஆயின் ஈற்றுறுப்பு மிகப் பெரிதாகும்.

$p=0$ எனின், அதாவது $\frac{(n+1)x}{x+1}$ என்பது 0, 1 என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடந்தால், $T_{r+1}>T_r$ என்னுந் தொடர்பு r இன் யாதும் ஒரு முழுவெண் பெறுமானத்திற்குத் தீர்க்கப்படாது.

$\therefore$ எல்லா r இற்கும் $T_{r+1}<T_r$.

அதாவது, அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக முதலிலிருந்து இறுதிவரைக்குங் குறையும்; ஆயின், முதலாம் உறுப்பு மிகப் பெரிதாகும்.

இப்பொழுது, $0<p<n$ எனக் கொள்க.

ஆயின், 1 இலிருந்து p வரைக்குமுள்ள r இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $T_{r+1}>T_r$; p யிலும் பெரிய r இனுடைய பெறுமானங்களுக்கு $T_{r+1}<T_r$.

ஆகவே, அவ்வுறுப்புக்களானவை முதலாம் உறுப்பிலிருந்து $(p+1)$ ஆம் உறுப்பு வரைக்கும் உறுதியாகக் கூடி, அதன்பின் உறுதியாகக் குறையும். ஆயின், $(p+1)$ ஆம் உறுப்பே அவ்விரியில் மிகப் பெரிதாகும்.

$\frac{(n+1)x}{x+1}$ என்பது ஒரு முழுவெண்ணெனக் கொள்க. அது q வாகுக.

ஆயின், $1 \leqslant q \leqslant n$.

$r=q$ எனின், $T_{r+1}=T_r$.

$r<q$ எனின், $T_{r+1}>T_r$.

$r>q$ எனின், $T_{r+1}<T_r$.

$q=n$ எனின் அவ்விரியிலுள்ள ஈற்றுறுப்புக்கள் இரண்டுஞ் சமனாகும்; ஆக, அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக முதலாம் உறுப்பிலிருந்து n ஆம் உறுப்பு வரைக்குங் கூடும்.

$q=1$ எனின், முதலிரண்டு உறுப்புக்களுஞ் சமனாகும்; ஆக, அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து ஈற்றுறுப்பு வரைக்குங் குறையும்.

$1<q<n$ எனின், அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக முதலாம் உறுப்பிலிருந்து q ஆம் உறுப்பு வரைக்குங் கூடும்; q ஆம் உறுப்பும் $(q+1)$ ஆம் உறுப்பும் சமனாகும்; அதன்பின் அவ்வுறுப்புக்கள் உறுதியாக $(q+1)$ ஆம் உறுப்பிலிருந்து ஈற்றுறுப்பு வரைக்குங் குறையும்.

$\frac{(n+1)x}{x+1}$ என்பது ஒரு முழுவெண்ணெனின், சமனான இரண்டு அடுத்துள்ள உறுப்புக்கள் என்றும் உண்டு; அவை அவ்விரியிலே மிகப் பெரியனவாகும்.

ஒரு விரியிலுள்ள ஓர் உறுப்பு தனக்கு முன்னாகவுள்ள உறுப்பிலும் பின்னாகவுள்ள உறுப்பிலும் பெரிதாயின், அதுவே அவ்விரியிலே மிகப் பெரிதாகும் என்பது இந்நியாயங்களிலிருந்து பெறப்படும்.

உ–ம். $x=\frac{1}{2}$ ஆகும்பொழுது $(2+x)^{10}$ என்பதன் விரியிலுள்ள மிகப் பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

T_r என்பது r ஆம் உறுப்பைக் குறிக்க.

$$T_{r+1}={}^{10}C_r 2^{10-r}x^r.$$

$$T_r={}^{10}C_{r-1}2^{10-r+1}x^{r-1}.$$

$$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{10-r+1}{r}\cdot\frac{x}{2}=\frac{11-r}{4r}.$$

$\therefore \frac{11-r}{4r}>1$ எனின், அதாவது $r<\frac{11}{5}$ எனின், அதாவது

$r \leqslant 2$ எனின், $T_{r+1}>T_r$.

$r>2$ எனின், $T_{r+1}<T_r$.

ஆகவே, அவ்வுறுப்புக்களானவை முதலாம் உறுப்பிலிருந்து மூன்றாம் உறுப்பு வரைக்கும் உறுதியாகக் கூடி அதன்பின் உறுதியாகக் குறைகின்றன.

ஆகவே, அவ்விரியிலே மூன்றாம் உறுப்பே மிகப் பெரிது,

அது ${}^{10}C_2 . 10^8 . \left(\frac{1}{2}\right)^2$ அதாவது $\frac{45}{4}.10^8$ இற்குச் சமன்.

$(1+x)^n$ என்பதிலுள்ள மிகப்பெரிய குணகம்.

x இன் ஏறு வலுக்களில் அவ்விரியிலுள்ள குணகங்கள்

${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2 \ldots {}^nC_n$ என்பன.

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}.$$

$$\therefore \frac{n-r+1}{r}>1 \text{ எனின், } {}^nC_r>{}^nC_{r-1}.$$

அதாவது,

$r<\frac{n+1}{2}$ எனின், ${}^nC_r>{}^nC_{r-1}$.

$r=\frac{n+1}{2}$ எனின், ${}^nC_r={}^nC_{r-1}$.

$r>\frac{n+1}{2}$ எனின், ${}^nC_r<{}^nC_{r-1}$.

n என்பது ஓர் இரட்டை முழுவெண்ணெனக் கொள்க.

ஆயின், $r=\frac{n+1}{2}$ என்னுந் தொடர்பு r இன் யாதும் ஒரு முழுவெண் பெறுமானத்திற்குத் தீர்க்கப்படாது.

$$r\leq\frac{n}{2} \text{ எனின், } {}^nC_r>{}^nC_{r-1}.$$

$$r>\frac{n}{2} \text{ எனின், } {}^nC_r<{}^nC_{r-1}.$$

$\therefore$ ${}^nC_r$ என்பது, 0 இலிருந்து $\frac{n}{2}$ வரைக்கும் r ஆனது கூட, உறுதியாகக் கூடி, $\frac{n}{2}$ இற்கு அப்பால் r ஆனது கூட உறுதியாகக் குறையும். ஆயின், $r=\frac{n}{2}$ ஆகும்பொழுது ${}^nC_r$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானம் பெறப்படும்.

n என்பது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணெனக் கொள்க.

ஆயின், $\frac{n+1}{2}$ என்பது ஒரு முழுவெண்ணாகும்.

$$\therefore\ r=\frac{n+1}{2} \text{ எனின், } {}^nC_r={}^nC_{r-1}.$$

$$r<\frac{n+1}{2} \text{ எனின், } {}^nC_r>{}^nC_{r-1}.$$

$$r>\frac{n+1}{2} \text{ எனின், } {}^nC_r<{}^nC_{r-1}.$$

$\therefore$ r ஆனது 0 இலிருந்து $\frac{n-1}{2}$ இற்குக் கூட ${}^nC_r$ என்பது உறுதியாகக் கூடும். ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}.$ r ஆனது $\frac{n+1}{2}$ இற்கு அப்பாற்கூட ${}^nC_r$ என்பது உறுதியாகக் குறையும் ; ஆயின், $r=\frac{n-1}{2}$ அல்லது $\frac{n+1}{2}$ ஆகும் பொழுது ${}^nC_r$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் பெறப்படும்.

$(1+x)^n$ என்பதன் விரியிலுள்ள குணகங்களினுடைய தொடர்புகள்.

${}^nC_r$ என்பதை C_r ஆற் குறிக்க,

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n.$$

${}^nC_r={}^nC_{n-r}$ ஆயிருத்தலால், $C_0=C_n,\ C_1=C_{n-1},\ C_2=C_{n-2}\ldots$ என்பன பெறப்படும்.

இருபக்கங்களிலும் $x=1$ எனப் பிரதியிட,

$$2^n=C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n$$

$x=-1$ எனப் பிரதியிட,

$$0=C_0-C_1+C_2-C_3+\ldots$$

இவற்றை ஒருங்கு கூட்ட

$$2^n=2(C_0+C_2+C_4+\ldots).$$

இவற்றைக் கழிக்க,

$$2^n=2(C_1+C_3+C_5+\ldots).$$

$$\therefore\ C_0+C_2+C_4+\ldots=C_1+C_3+C_5+\ldots=2^{n-1}.$$

உதாரணம் 1. $C_0^2+C_1^2+\ldots+C_n^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ எனக் காட்டுக.

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n.$$

அன்றியும், $(x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n.$

வலப்பக்கத்திலுள்ள விரிகளின் பெருக்கத்தில் x^n இன் குணகம்

$$C_0^2+C_1^2+\ldots+C_n^2.$$

$(1+x)^n(x+1)^n$ அதாவது $(1+x)^{2n}$ இல் x^n இன் குணகம்

$${}^{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!\,n!} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ C_0^2+C_1^2+\ldots+C_n^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

அல்லது, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+C_1\frac{1}{x}+C_2\frac{1}{x^2}+\ldots+C_n\frac{1}{x^n}.$

$\therefore\ C_0^2+C_1^2+\ldots+C_n^2=(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ இல் x ஐச் சாராத உறுப்பு

$=(1+x)^{2n}$ இல் x^n இன் குணகம்.

உதாரணம் 2. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\ldots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{C_r}{r+1}=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot{}^{n+1}C_{r+1}$$

$$\therefore \quad \frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{1}+\ldots+\frac{C_n}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[{}^{n+1}C_1+{}^{n+1}C_2+\ldots+{}^{n+1}C_{n+1}\right]$$

$(1+x)^{n+1}$ இன் விரியிற் குணகங்களை ஆராய,

$${}^{n+1}C_0+{}^{n+1}C_1+\ldots+{}^{n+1}C_{n+1}=2^{n+1}.$$

$$\therefore \quad \frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\ldots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

பயிற்சி 36

1. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$ என்பதன் விரியில் x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க.

2. $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^5$ என்பதன் விரியில் x^{15} என்பதன் குணகத்தைக் காண்க.

3. (a) 999^4, (b) $(\sqrt{2}+1)^8$ என்பதன் முழுவெண் பகுதி என்னும் இவற்றைக் காண்பதற்கு ஈருறுப்பித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

4. $x=\frac{2}{3}$ ஆகும்பொழுது $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^9$ என்பதனுடைய விரியிலுள்ள மிகப்பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

5. $x=\frac{1}{2}$ ஆகும்பொழுது $(1+2x)^9$ என்பதன் விரியிலுள்ள மிகப் பெரிய உறுப்புக்களைக் காண்க.

6. $\frac{6}{5}<x<\frac{15}{8}$ x இனுடைய எறுவலுக்களில் $(3+2x)^8$ இன் விரியிலுள்ள 5 ஆம் உறுப்பு ஆயின் மிகப்பெரியதாகுமெனக் காட்டுக.

7. n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணாக $\frac{n}{n+1}<x<\frac{n+1}{n}$ ஆயின் $(1+x)^{2n}$ என்பதிலுள்ள மிகப்பெரிய உறுப்பிற்கு மிகப்பெரிய குணகம் இருக்குமெனக் காட்டுக.

8. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n\ldots$ எனின்

(i) n ஒற்றையாகும்பொழுது $C_0{}^2-C_1{}^2+C_2{}^2-\ \ldots\ -C_n{}^2=0$ என்றும்,

(ii) $C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}\ldots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ என்றும்,

(iii) $C_1+2C_2+3C_3+\ldots+n.C_n=n.2^{n-1}$ என்றுங் காட்டுக.

9. r என்பது n இலும் பெரிதாயில்லாதபோது

$C_0C_r+C_1C_{r-1}+\ldots+C_rC_0$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க ; $r=n$ ஆகும் பொழுது அப்பெறுமானம் மிகப்பெரிதாகுமெனவுங் காட்டுக.

10. n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயிருக்க $x=1$ ஆகும்பொழுது $(1+2x)^{3n}$ என்பதன் விரியிலுள்ள மிகப்பெரிய உறுப்பை ஆராய்வதால்,

$$\frac{(3n+1)!}{n!(2n)!}>\left(\frac{27}{4}\right)^n \text{ எனக் காட்டுக.}$$

11. $(1+2x+3x^2)^{10}$ என்பதன் விரியிலுள்ள x^3 இன் குணகத்தைக் காண்க.

12. $\left(1+x+\frac{2}{x}\right)^6$ இன் விரியில் x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

13. x என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயின், $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ இன் விரியில் x^{2n-2r}, x^{-2r} என்பனவற்றினுடைய குணகங்களை எழுதுக.

P_r என்பது இக்குணகங்களின் பெருக்கத்தைக் குறித்தால், $P_r : P_{r-1}$ என்னும் விகிதத்தை எழுதுக. அன்றியும், P_r என்பது மிகப்பெரிதாய் உள்ள r இன் பெறுமானத்தையுங் காண்க.

14. n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயிருக்க,

$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_rx^r+\ldots a_{2n}x^{2n}$ எனின்,

$(1+x+x^2)^n$, $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n$ என்பனவற்றினுடைய விரிவுகளின் பெருக்கத்தில் x ஐச் சாராத உறுப்பை ஆராய்வதால், $a_0{}^2-a_1{}^2+a_2{}^2-a_3{}^2+\ \ldots\ +a_{2n}{}^2=a_n$ எனக் காட்டுக.

திண்மக் கேத்திரகணிதம்

அத்தியாயம் 4

வெளிப்படையுண்மை 1. **வெளியில் இரு புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு நேர்கோடு மாத்திரம் உண்டு.**

வரைவிலக்கணம். **ஒரு தளம் என்பது தன்மீதுள்ள எவையேனும் இரு புள்ளிகளைத் தொடுக்குங் கோடு முழுவதுந் தன்மீது கிடக்கும் ஒரு பரப்பு.**

வெளிப்படையுண்மை 2. **ஒரே நேர் கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு தளம் மாத்திரம் உண்டு.**

உய்த்தறிவு 1. **ஒரு நேர்கோட்டிற்கூடாகவும் அதன்மீது கிடவாத ஒரு புள்ளிக்கூடாகவும் ஒரு தளம் மாத்திரம் வரைதல்கூடும்.**

t என்பது அக்கோடாகுக ; P என்பது அப்புள்ளியாகுக. l இன்மீது A, B என்னும் இரு புள்ளிகளை எடுக்க. ஆயின், A,B,P என்பன ஒரு தனித்தளத்தை வரையறுக்கும். A, B என்பன இத் தளத்தின்மீது கிடத்தலால், l என்னும் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் இத்தளத்தின் மீது கிடக்கும். ஆகவே, C, D என்பன l இன்மீதுள்ள எவையேனுமிரு புள்ளிகளாயின், APB என்னுந் தளத்தில் C,D,P என்னும் மூன்று புள்ளிகளும் இருக்கும் ; அதாவது, CDP என்னுந் தளம் APB என்னுந் தளத்தோடு ஒன்றுகும்.

ஆகவே, l என்னுங் கோட்டிற்கூடாகவும், P என்னும் புள்ளிக்கூடாகவும் ஒரு தளம் மாத்திரம் உண்டு.

உய்த்தறிவு 2. **ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நேர்கோடுகள் ஒரு தனித் தளத்தை வரையறுக்கும்.**

l,m என்பன ஒன்றையொன்று A யில் வெட்டும் இரு கோடுகளாகுக. P என்பது m இன்மீதுள்ள வேறு யாதும் புள்ளியாகுக. ஆயின், P, l என்பன ஒரு தனித்தளத்தை வரையறுக்கும். A என்பது l இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாதலின், இத்தளம் A யிற்கூடாகச் செல்லும். இனி, m என்பது P, A என்பனவற்றைத் தொடுக்குங் கோடாதலால், இத்தளம் m இன் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கூடாகவுஞ் செல்லும். ஆகவே, அத்தளம் l,m என்னும் இரண்டிற்குமூடாகச் செல்லும். ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகள் ஒரு தனித் தளத்தை வரையறுக்குமாததால், l, m என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுந் தளம் தனியானது.

உய்த்தறிவு 3. **தந்த ஒரு நேர்கோட்டிற்கூடாக எத்தொகைத் தளங்களும் வரையப்படுதல் கூடும்.**

l என்பது அந்நேர்கோடாகுக. P என்பது l இன்மீது கிடவாத யாதுமொரு புள்ளியாயின், l,P என்பனவற்றிற்கூடாக ஒரு தனித் தளம் வரைதல் கூடும். இத்தளத்தில் கிடவாத Q என்னும் ஒரு புள்ளியை யெடுக்க. ஆயின், l,Q என்பன l,P என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும்

தளத்தோடு ஒன்ருகாத ஒரு தளத்தை வரையறுக்கும். P, l என்பன வற்றிற்கூடாகச் செல்லும் தளத்திற்கு வெளியால் எத்தொகைப் புள்ளிகளும் எடுக்கப்படலாமாதலால் l இற்கூடாக எத்தொகைத் தளங்களும் வரையப்படலாம் என்பது பெறப்படும்.

வரைவிலக்கணங்கள். ஒரே தளத்திற் கிடக்கின்ற இரு நேர்கோடுகள் **ஒருதளத்தன.** ஒரேதளத்தில் கிடவாத இரு நேர் கோடுகள், **ஓராயமானவை.** இரு நேர்கோடுகள் ஒரு தளத்தனவாய் ஒன்றை ஒன்று வெட்டாவாயின், அவை **சமாந்தரம்** எனப்படும்.

வெளிப்படையுண்மை 3. தந்த ஒரு நேர்கோட்டிற் கிடவாத ஒரு புள்ளிக்கூடாகத் தந்த அக்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் ஒரு நேர்கோடே வரையப்படலாம்.

வரைவிலக்கணம். ஒரு நேர்கோட்டிற்கும் ஒரு தளத்திற்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி இல்லையெனின், அந்நேர்கோடு அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரம் எனப்படும்.

வெளிப்படையுண்மை 4. இரு தளங்களுக்கு ஒரு புள்ளி பொதுவாயிருந்தால், அவற்றிற்கு வேறெரு புள்ளியும் பொதுவாகும்.

உய்த்தறிவு 4. ஒரு பொதுப்புள்ளியையுடைய இருதளங்கள் ஒரு கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டும்.

A என்பது ஒரு பொதுப்புள்ளியாகுக. ஆயின், B என்னும் வேறெரு புள்ளியும் பொதுவாயிருக்கும். ஆகவே, AB என்னுங் கோடு அத்தளங்கள் இரண்டிற்கும் பொதுவாகும். AB யின்மீது கிடவாத P என்னும் ஒரு பொதுப்புள்ளி இருந்தால் அத்தளங்கள் இரண்டும் PAB என்னுந் தளத்தோடு ஒன்ருகும். ஆகவே, அத்தளங்கள் இரண்டும் வேறு வேருனவையாயின், AB யின்மீது கிடவாத ஒரு பொதுப்புள்ளி அவற்றிற்கு இராது ; அதாவது. A, B என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் கோட்டின் வழியே அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும்.

வரைவிலக்கணம். யாதொரு புள்ளியும் பொதுவாயில்லாத இரு தளங்கள் சமாந்தரம் எனப்படும்.

தேற்றம் 1. l என்னும் ஒரு நேர்கோடு α என்னுந் தளத்திலே கிடக்கின்ற m என்னும் ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாயின், l என்பது α விற்கிடக்கும், அன்றெனின் α விற்குச் சமாந்தரமாகும்.

l, m என்பன சமாந்தரமாதலின், அவை ஒரு தளத்திலே (β என்க) கிடக்கும். β என்பது α வோடு ஒன்ருயின், l என்பது α விற் கிடக்கும். β என்பது α வோடு ஒன்ருயின், l என்பது α விற்குச் சமாந்தரமில்லை எனக் கொள்க. ஆயின், l என்பது α என்பதை A என்னும் யாதோ ஒரு புள்ளியிற் சந்தித்தல் வேண்டும். A என்னும் இப்புள்ளி α, β என்னுந் தளங்களுக்குப் பொது. ஆகவே, α, β என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடு A யினூடாகச் செல்லவேண்டும். ஆனல், இவ் வெட்டுக்கோடு m ஆகும். ஆகவே, A என்பது l, m என்னும் இரண்டிற்கும் பொதுவாதல் வேண்டும். இது ஓர் எதிர்மறுப்பைத் தரும். ஆகவே β என்பது α வோடு ஒன்றன்றெனின், l என்பது α விற்குச் சமாந்தரம்.

கி. தே. l என்பது α என்னுந் தளத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோடாயும் A என்பது α விலுள்ள ஒரு புள்ளியாயும் இருந்தால், A யினூடாக l இற்குச் சமாந்தரமாய்ச் செல்லுந் தனிக்கோடு α விற் கிடக்கும்.

தேற்றம் 2. α என்னும் ஒரு தளத்திலுள்ள l என்னும் ஒரு கோடு β என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயின், α என்பது β விற்குச் சமாந்தரமாகும், அன்றெனின் l என்பது α, β என்பனவற்றின் வெட்டுக் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

α, β என்பன சமாந்தரமல்லவெனின், அவை m என்னுங் கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டுக. l, m என்பன ஒரு தளத்தனவாதலின், அவை ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாதல் வேண்டும். அன்றெனின் ஒன்றையொன்று வெட்டல் வேண்டும். அவை யாதோ ஒரு புள்ளி A யில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன எனக் கொள்க. m என்பது β வில் இருக்கின்றமையால், A என்னும் புள்ளி β வில் இருக்கும். ஆகவே, l என்னுங்கோடு β என்னுந் தளத்தை A யில் வெட்டும். l என்பது α விற்குச் சமாந்தரமாதலால், இது ஓர் எதிர் மறுப்பைத்தரும். ஆகவே, l, m, என்பன சமாந்தரமாதல் வேண்டும்.

அதாவது, α, β என்பன ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமல்லவெனின், l என்பது அவற்றின் வெட்டுக்கோட்டிற்குச் சமாந்தரம்.

தேற்றம் 3. ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்களுள் ஒவ்வொன்றிற்குஞ் சமாந்தரமான ஒரு நேர் கோடு அத்தளங்களின் வெட்டுக் கோட்டிற்குச் சமாந்தரம்.

l என்பது அக்கோடாயும், α, β என்பன m என்னும் ஒரு கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்களாயும் இருக்க. A என்பது m இன்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. A, l என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுந் தளம் A யிற்கூடாகச் செல்லும் p என்னும் ஒரு கோட்டின் வழியே α என்பதை வெட்டும். l என்பது α விற்குச் சமாந்தரமாதலின், மேற்றந்த தேற்றத்தால், p என்பது l இற்குச் சமாந்தரம். அதுபோல, A, l என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுந் தளம் A யினூடாகச் செல்லும் q என்னும் ஒரு கோட்டின்வழியே β என்பதை வெட்டும். இவ்வண்ணம், p, q என்பன A யினூடாக l இற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் இரு கோடுகள். ஆகவே அவை ஒரே கோடுகளாகும். p என்பது α விலும், q என்பது β விலுங் கிடக்கின்றமையால், அவை m ஒடு பொருந்தல் வேண்டும் ; அதாவது, l என்பது m இற்குச் சமாந்தரம்.

தேற்றம் 4. இரு நேர் கோடுகளானவை மூன்றும் நேர் கோடொன்றிற்குச் சமாந்தரமாயி,ன் அவை தம்முட் சமாந்தரம்.

l, m என்னுங்கோடுகள் p என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகுக.

அம்மூன்று கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் இருக்கின்றன எனக் கொள்க. l, m என்பன சமாந்தரமல்லவெனின், அவை ஒன்றையொன்று யாதோ ஒரு புள்ளி A யிற் சந்தித்தல் வேண்டும்.

ஆயின் A என்னும் புள்ளிக்கூடாக p என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் l, m என்னும் இரு கோடுகள் இருக்கும்.

இது வெளிப்படையுண்மை 3 ஐ எதிர் மறுக்கின்றது. ஆகவே, l, m என்பன சமாந்தரம்.

l, m என்பன எல்லாம் ஒரே தளத்தில் இல்லை எனக் கொள்க.

A என்பது m இன்மீது p, l என்பனவுள்ள தளத்தில் இல்லாத ஒரு புள்ளியாகுக. m என்பது l இற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், q என்பது A யிற்கூடாக l யிற்குச் சமாந்தரமான கோடாகுக. ஆயின், q, l என்பன ஒருதளத்தன, p என்பது l இற்குச் சமாந்தரமாதலால் p என்பது q, l என்பன இருக்குந் தளத்திற்குச் சமாந்தரம். p என்பது m இற்குச் சமாந்தரமாதலால், p என்பது q, m என்பன இருக்குந் தளத்திற்குச் சமாந்தரம். l, m என்பன ஒரே தளத்தில் இல்லாமையால் இவ்விரு தளங்களும் வேறு வேறுகும் ஆகவே, p என்பது இந்த இரண்டு தளங்களினுடைய வெட்டுக் கோடாகிய q விற்குச் சமாந்தரம். ஆகவே, A யினூடாக p யிற்குச் சமாந்தரமாய் q, m என்னும் இருகோடுகள் இருக்கும். இது ஓர் எதிர்மறுப்பைத் தரும்.

ஆகவே, l, m என்பன ஒரே தளத்தில் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, அவை சமாந்தரம்.

தேற்றம் 5. இரு சமாந்தரமான தளங்களை வெட்டும் ஒரு தளம் அவற்றைச் சமாந்தரமான கோடுகளில் வெட்டும்.

α, β என்னும் இரு சமாந்தரமான தளங்களை முறையே l, m என்னுங் கோடுகளின் வழியே ஒரு தளஞ் சந்திக்கட்டும். l, m என்பன சமாந்தரமல்லவெனின், அவை ஒரே தளத்தில் இருக்கின்றமையால் யாதோ ஒரு புள்ளி A யிற் சந்தித்தல் வேண்டும். ஆயின், A என்னும் புள்ளி α, β என்னுந் தளங்களுக்குப் பொதுவாகும். இது ஓர் எதிர் மறுப்பைத் தரும். ஆகவே, l, m என்பன சமாந்தரம்.

தேற்றம் 6. ஒரு தளம் α விற்கு வெளியால் ஒரு புள்ளி P யிற்கூடாக ஒருதளம் மாத்திரம் α விற்குச் சமாந்தரமாய் வரைதல் கூடும்.

l, m என்பன α என்னுந் தளத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் இருகோடுகளாகுக ; l', m' என்பன p யிற்கூடாக முறையே l, m என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளாகுக. l', m' என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லும் தளம் β என்பதை ஆராய்க. இது α விற்குச் சமாந்தரமன்றெனின், அது α என்பதை p என்னும் ஒரு கோட்டின் வழியெ வெட்ட வேண்டும். l' என்பது α என்னுந் தளத்திலுள்ள l இற்குச் சமாந்தரமாதலால், l' என்பது α விற்குச் சமாந்தரம். p என்பது α விற்கிடத்தலால், l' என்பது p என்பதை வெட்டல் இயலாது. ஆகவே, l' என்பது p யிற்குச் சமாந்தரம். அவை ஒரு தளத்தில் இருக்கின்றமையே அதற்குக் காரணம். அதுபோல, m' என்பது p யிற்குச் சமாந்தரம். l', m' என்பன P யில் ஒன்றையொன்று வெட்டு கின்றமையால், இது ஓர் எதிர் மறுப்பைத் தரும். ஆகவே, β என்னுந் தளம் α என்னுந் தளத்திற்குச் சமாந்தரம். ஆகவே, P யிற்கூடாக α விற்குச் சமாந்தரமாய் ஒருதளம் இருக்கும்.

P யிற்கூடாக α விற்குச் சமாந்தரமாய் வேறொருதளம் γ என்பது இருக்கின்றதெனக் கொள்க. β, γ என்பன t என்னும் ஒரு கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டுக. α வில் A என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து A யிற்கூடாக α விற் கிடக்கின்ற u என்னும் யாதுமொரு கோட்டை வரைக. ஆயின், u என்பது β, γ என்னுந் தளங்கள் இரண்டிற்குச் சமாந்தரமாகும். ஆகவே, u என்பது t யிற்குச் சமாந்தரம்.

ஆகவே, α வில் A யிற்கூடாகச் செல்லும் எக்கோடும் t யிற்குச் சமாந்தரம். இது ஓர் எதிர்மறுப்பைத் தரும். ஆகவே, P யிற்கூடாக α விற்குச் சமாந்தரமாய் ஒரு தளம் மாத்திரம் இருக்கும்.

தேற்றம் 7. இரு தளங்களானவை மூன்றுந் தளமொன்றிற்குச் சமாந்தரமாயின் அவை தம்முட் சமாந்தரம்.

α, β என்னுந் தளங்கள் γ என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகுக. α, β என்பன சமாந்தரமல்லவெனின், அவை ஒரு கோட்டின் வழியே சந்தித்தல் வேண்டும். P என்பது இக்கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாயின் P யிற்கூடாக γ இற்குச் சமாந்தரமாய் இரு தளங்கள் α, β என்பன இருக்கும். இது ஓர் எதிர்மறுப்பைத் தரும். ஆகவே α, β என்பன சமாந்தரமாதல் வேண்டும்.

பயிற்சி 37

1. எல்லாம் ஒரே தளத்தில் இல்லாத மூன்று கோடுகள் இவ்விரண்டாக ஒன்றையொன்று வெட்டினால், அவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

2. மூன்று தளங்கள் இவ்விரண்டாக ஒன்றையொன்று வெட்டினால், அம்மூன்று வெட்டுக்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பனவாகவோ, சமாந்தரமானவையாகவோ, பொருந்துவனவாகவோ இருக்கும்.

3. ABC, DBC என்பன வேறுவேறு தளங்களில் BC என்பதைப் பொதுப் பக்கமாயும் $AB = AC$ யாயும், $DB = DC$ ஆயுமுள்ள இரு முக்கோணிகள். ABC, ACB என்னுங் கோணங்களினுடைய இருகூறாக்கிகள், AC, AB என்பனவற்றை முறையே F, E என்பன வற்றிற் சந்திக்கின்றன ; DBC, DCB என்னுங் கோணங்களினுடைய இருகூறாக்கிகள் DC, DB என்பனவற்றை முறையே H, G என்பனவற்றிற் சந்திக்கின்றன. EG, AD, FH என்னுங் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பனவாகவோ சமாந்தரமானவையாகவோ இருக்குமெனக் காட்டுக.

4. ஒரு தளத்தனவாயோ அல்லனவாயோ உள்ள இரு கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாய்த் தந்த ஒரு புள்ளிக்கூடாக ஒரு தனித் தளம் வரைதல் கூடுமெனக் காட்டுக.

5. சமச்சீரில்லாதனவெனத் தந்த இரு கோடுகளை வெட்டத் தந்த ஒரு புள்ளிக்கூடாக ஒரு தனி நேர்கோடே பொதுவாக வரைதல் கூடுமெனக் காட்டுக.

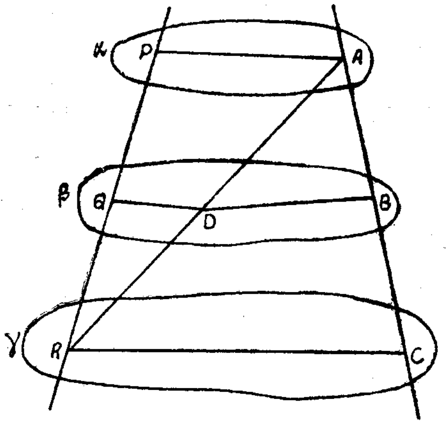
6. சமச்சீரில்லாதனவெனத் தந்த இரு கோடுகளை வெட்டத் தந்த ஒரு கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் ஒரு தனி நேர்கோடே பொதுவாக வரைதல் கூடுமெனக் காட்டுக.

7. OA, OB, OC, OD என்பன தம்முள் எவையேனும் மூன்று ஒரு தளத்தனவாய் இல்லாத நான்கு கோடுகள். OAB, OBC, OCD, ODA என்னுந் தளங்களை ஓர் இணைகரத்தினுடைய பக்கங்களின் வழியே வெட்டும்படி ஒரு தளம் வரைதல் கூடுமெனக் காட்டுக.

[OAB, OCD என்னுந் தளங்களும் OBC, ODA என்னுந் தளங்களும் வெட்டுங் கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்தை ஆராய்க.]

8. A, B, C என்பன ஒரு தளத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் ; D, E, F என்பன AB யானது DE யையும், BC யானது EF ஐயும், CA யானது FD யையுஞ் சந்திக்குமாறு வேறொரு தளத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள். AD என்பது BCE என்னுந் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயின், BE என்பது FC யிற்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக.

தேற்றம் 8. எவையேனும் இரு நேர் கோடுகள் 3 சமாந்தரமான தளங்களால் வெட்டப்பட்டால், வெட்டுத்துண்டுகள் விகிதசமம்.



α, β, γ என்னுந் தளங்கள் இரண்டு நேர் கோடுகளை P, Q, R என்னும் புள்ளிகளிலும் A, B, C என்னும் புள்ளிகளிலுஞ் சந்திக்க.

$PQ/QR = AB/BC$ என நிறுவ வேண்டும்.

AR ஐத் தொடுக்க ; அது β என்னுந் தளத்தை D யில் வெட்டுக.

QD, BD, AP, CR என்பன வற்றை தொடுக்க.

APR என்னுந் தளம் α, β என்பனவற்றை முறையே AP, QD என்பனவற்றின் வழியே வெட்டுகின்றது.

$$\therefore\ AP \parallel QD.$$

$$\therefore\ PQ/QR = AD/DR.$$

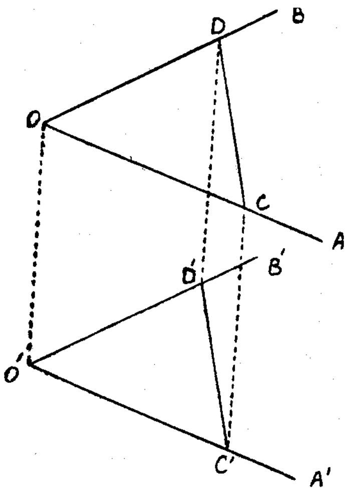
அதுபோல, $BD \parallel CR$.

ஆயின், $AD/DR = AB/BC$.

$$\therefore\ PQ/QR = AB/BC.$$

தேற்றம் 9. ஒரு தளத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் OA, OB என்னும் இரு நேர் கோடுகளானவை முறையே வேறொரு தளத்திலுள்ள $O'A'$, $O'B'$ என்னுங் கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாயின், $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

OA யின்மீது C என்னும் ஒரு புள்ளியையும் OB யின்மீது D என்னும் ஒரு புள்ளியையும் எடுக்க. $O'A'$ இன் மீது C' ஐயும், $O'B'$ இன்மீது D' ஐயும், $O'C' = OC$ ஆகுமாறும் $O'D' = OD$ ஆகுமாறும் எடுக்க. OC யானது $O'C'$ இற்குச் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கின்றமையால் OO' ஆனது CC' இற்குச் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கும். அதுபோல, OO' ஆனது DD' இற்குச் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கும்.



$\therefore\ CC'$ ஆனது DD' இற்குச் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கும்.

$$\therefore\ DC = D'C'.$$

$$\therefore\ \angle COD \equiv C'O'D'.$$

$$\therefore\ \angle COD = \angle C'O'D'.$$

ஓராயமான இரண்டு கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணம்.

வரைவிலக்கணம். ஓராயமான இரு கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணம் அவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம்.

l, l' என்பன ஓராயமான கோடுகளாயும் O என்பது வெளியிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயுமிருக்க, OA, OB என்பன முறையே l, l' என்பன வற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்பட்டால், கோணம் AOB என்பது l, l' என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணமாகும்.

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணம்.

α, β என்பன l என்னும் ஒரு கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்களாகுக. l இன்மீது யாதுமொரு புள்ளி O என்பதை எடுக்க ; α என்னுந் தளத்தில் O விற்கு ஊடாக l இற்குச் செங்குத்தாய் l_1 என்னுங் கோட்டையும், β என்னும் தளத்தில் O விற்கு ஊடாக l இற்குச் செங்குத்தாய் l_2 என்னுங் கோட்டையும் வரைக.

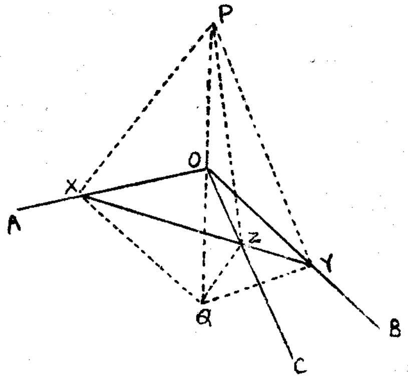
9 ஆந் தேற்றத்திலிருந்து, l_1, l_2 என்பனவற்றிற்கு இடையில் உள்ள கோணம் l இன்மீது O வினது நிலையைச் சாராது என்பது பெறப்படும்.

இக்கோணம் α, β என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணமெனவரையறுக்கப்படும். அது இருமுகக் கோணம் எனப்படும்.

அத்தளங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணம் ஒரு செங்கோணமாயின், அத்தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தெனப்படும்.

தேற்றம் 10. **p என்னும் ஒரு நேர்கோடு ஒன்றையொன்று வெட்டும் OA, OB என்னும் நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றிற்குஞ் செங்குத்தெனின், p என்பது AOB என்னுந் தளத்திலுள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்குஞ் செங்குத்து.**

O வினூடாக p யிற்குச் சமாந்தரமாய் OP என்பதை வரைக. ஆயின், OP என்பது OA, OB என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்து. O வினூடாக AOB என்னுந் தளத்திலுள்ள யாதுமொரு தந்த கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் OC என்னுங் கோட்டை வரைக. OA, OB, OC என்பனவற்றை முறையே X, Y, Z என்பனவற்றில் வெட்டும்படி யாதுமொரு கோட்டை வரைக. $OQ = PO$ ஆகுமாறு PO என்பதை Q விற்கு நீட்டுக. PX, PY, PZ, QX, QY, QZ என்பனவற்றைத் தொடுக்க. OX என்பது POQ விற்குச் செங்குத்து ஆதலாலும், $PO = OQ$ வாதலாலும், $PX = QX$.



OY என்பது POQ விற்குச் செங்குத்தாதலால், $PY = QY$.

$\therefore$ PXY, QXY என்னும் முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும்.

$\therefore$ $\angle PXY = \angle QXY$.

$\therefore$ PXZ, QXZ என்னும் முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும்.

$\therefore$ $PZ = QZ$.

$\therefore$ POZ, QOZ என்னும் முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும்.

$\therefore$ $\angle POZ = \angle QOZ =$ ஒரு செங்கோணம்.

அதாவது, OP என்பது OC யிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ OP என்பது AOB என்னுந் தளத்திலுள்ள எக்கோட்டிற்குஞ் செங்குத்து.

$\therefore$ p என்பது AOB என்னுந் தளத்திலுள்ள எக்கோட்டிற்குஞ் செங்குத்து.

ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வன்.

p என்னும் ஒரு கோடு α என்னும் ஒரு தளத்திலுள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்குஞ் செங்குத்தெனின், p என்பது α என்னும் அத்தளத்திற்கு ஒரு செவ்வன் எனப்படும்.

தேற்றம் 11. **ஒரு தளத்திலே தந்த ஒரு புள்ளிக்கூடாக ஒரு செவ்வன் மாத்திரம் அத்தளத்திற்கு வரைதல் கூடும்.**

O என்பது α என்னும் ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. அத்தளத்தில் OA என்னும் ஒரு கோட்டை வரைக; அதன்பின் அத்தளத்தில் OB என்னுங் கோட்டை $\angle AOB =$ ஒரு செங்கோணமாகுமாறு வரைக. OA யிற்கூடாக வேறொரு தளத்தை வரைந்து, இத்தளத்தில் OC என்னுங் கோட்டை $\angle AOC =$ ஒரு செங்கோணமாகுமாறு வரைக. ஆயின், 10 ஆந் தேற்றத்தால் OA என்பது BOC என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வனாகும். BOC என்னுந் தளத்தில் $\angle BOD =$ ஒரு செங்கோணமாகுமாறு OD என்னுங் கோட்டை வரைக. ஆயின், OD என்பது OA, OB என்னும் இரண்டிற்குஞ் செங்குத்தாகும்; ஆகவே, அது α என்னுந் தளத்திற்கு ஒரு செவ்வனாகும்.

OE என்பது α என்னுந் தளத்திற்கு O விலுள்ள வேறொரு செவ்வனெனக் கொள்க. OF என்பது α என்னுந் தளமும் DOE என்னுந் தளமும் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடாகுக. OF என்பது α வின்மீது கிடத்தலால், அது OD, OE என்னும் இரண்டிற்குஞ் செங்குத்து. அம்மூன்று கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் இருக்கின்றமையால் இது முடியாது. ஆகவே, O விற்கூடாக α என்னுந் தளத்திற்கு வேறு யாதுஞ் செவ்வன் இருத்தல் இயலாது.

ஆகவே, O விற்கூடாக α என்னுந் தளத்திற்கு ஒரு செவ்வன் மாத்திரம் இருக்கும்.

தேற்றம் 12. **ஒரு நேர்கோடு இரு தளங்களுக்குச் செவ்வனாயின், அத்தளங்கள் சமாந்தரம்.**

p என்னுங் கோடு α, β என்னுந் தளங்களுக்குச் செவ்வனாகுக; A, B என்பன அக்கோடு முறையே α, β என்பனவற்றைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளாகுக. α என்னுந் தளத்தில் AC, AD என்னும் இரு கோடுகள் வரைக. p, AC எனபனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் தளம் β என்னுந் தளத்தை BE என்னுங் கோட்டினது நீளத்திற்கு வெட்டுக; p, AD என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லுந் தளம் β என்பதை BF என்னுங் கோட்டினது நீளத்திற்கு வெட்டுக. BE என்பது β என்னுந் தளத்தில் இருக்கின்றமையால், அது p யிற்குச் செங்குத்து. AC என்பது α என்னுந் தளத்தில் இருத்தலால், அது p யிற்குச் செங்குத்து. அதாவது p என்பது $ACBE$ என்னுந் தளத்திற் கிடந்து அத்தளத்திலுள்ள AC, BE என்னுங் கோடுகள் இரண்டிற்குஞ் செங்குத்தாகும்.

ஆகவே, AC, BE என்பன சமாந்தரம்.

அதுபோல, AD, BF என்பன சமாந்தரம்.

ஆகவே, ACD என்னுந் தளம் BEF என்னுந் தளத்திற்குச் சமாந்தரம்.

$$\therefore \alpha \parallel \beta.$$

இ. தே. கொடுக்கப்பட்ட AB, BC, CD என்னுங் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் p என்னும் ஒரு நேர் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயின், அத்தொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் எல்லாம் ஒரே தளத் திற் கிடக்கும்.

p என்னுங் கோடு ABC என்னுந் தளத்திற்கும் BCD என்னுந் தளத்திற்குஞ் செங்குத்து. ஆகவே, இத்தளங்கள் இரண்டும் ஒரே தள மல்லவெனின், அவை சமாந்தரமாதல் வேண்டும். அவற்றிற்கு B என்னும் ஒரு பொதுப்புள்ளி இருத்தலால், இது முடியாது.

ஆகவே, அத்தளங்கள் இரண்டும் ஒரே தளமாகும்.

தேற்றம் 13. **ஒரே தளத்திற்குச் செவ்வனான இரு கோடுகள் சமாந்தரம்.**

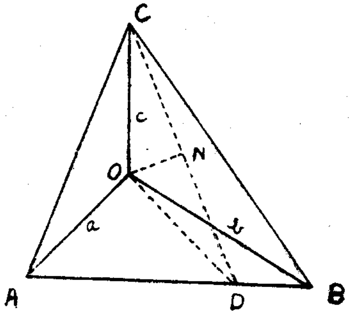
p, q என்னுங் கோடுகள் α என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வன்களாகுக. A, B என்பன முறையே அவை அத்தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி களாகுக. A யினூடாக q' என்னுங் கோட்டை q விற்குச் சமாந்தரமாக வரைக. ஆயின், q' என்பது α என்னுந் தளத்திற்கு A யிற் செவ்வனாகும். ஆகவே, q' என்பது p யோடு ஒன்றுதல் வேண்டும்.

இ. தே. வெளியில் யாதுமொரு தந்த புள்ளிக்கூடாகத் தந்த ஒரு தளத்திற்கு ஒரு செவ்வன் மாத்திரஞ் செல்லும்.

தேற்றம் 14. **p என்னும் ஒரு கோடு α என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வனாயின், p யிற்குச் சமாந்தரமான q என்னும் யாதுமொரு கோடும் α விற்குச் செவ்வன்.**

q வின்மீது A என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து அந்த A யிலிருந்து α விற்குச் செவ்வன் வரைக. இச்செவ்வன் p யிற்குச் சமாந்தரமாகும். ஆகவே அது q வோடு ஒன்றுதல் வேண்டும். அதாவது, q என்பது α விற்குச் செவ்வன்.

உ-ம். OA, OB, OC என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள். அவை முறையே a, b, c என்னும் நீளங்களுடையன. ABC, OAB என்னுந் தளங்களுக்கு இடையி லுள்ள கோணத்தையும் O விலிருந்து ABC என்னுந் தளத்திற்கு வரையுஞ் செங்குத்தினது நீளத்தையுங் காண்க.



ON என்பது ABC என்னுந் தளத்தை N இற் சந்திக்குமாறு அதற்குச் செங்குத் தாய் வரையப்படுக.

AB என்பதை D யிற் சந்திக்கும்படி CN என்பதை நீட்டுக.

OC என்பது OA, OB என்பனவற் றிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ OC என்பது AB யிற்குச் செங்குத்து.

ON என்பது ABC என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ ON என்பது AB யிற்குச் செங்குத்து.

அதாவது, AB என்பது ON, OC என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ AB என்பது OD, CD என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ $\angle ODC$ என்பது OAB, ABC என்னுந் தளங்களுக்கு இடையி லுள்ள கோணம்.

அது θ ஆகுக.

OC என்பது OD யிற்குச் செங்குத்தாதலால்,

$$\text{தான் } \theta = \frac{OC}{OD}.$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\tfrac{1}{2}\, OA.OB = \triangle AOB \text{ யின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}\, AB.OD$$

$$\therefore \quad OD = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

$$\therefore \quad CD^2 = OC^2 + OD^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\tfrac{1}{2}\, OC.OD = \triangle OCD \text{ யின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}\, ON.CD$$

$$\therefore \quad ON = \frac{OC.OD}{CD} = \frac{cab}{\sqrt{(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)}}$$

$$\text{தான் } \theta = \frac{c\sqrt{(a^2 + b^2)}}{ab}.$$

தேற்றம் 15. **ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங் களுள் ஒன்று அவற்றினுடைய செவ்வன்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்றிற்குச் சமன்.**

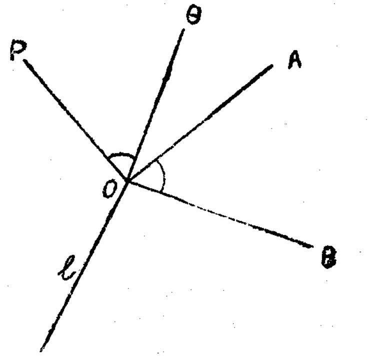
O என்பது α, β என்னும் இரு தளங்களினுடைய வெட்டுக்கோடு l இன்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக.

OA, OB என்பன முறையே α, β என்னுந் தளங்களில் l இற்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடுகளாகுக.

ஆயின், AOB என்பது α, β என்னுந் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களுள் ஒன்று; மற்றைக் கோணம் OA யிற்கும் நீட்டிய BO விற்கும் இடையிலுள்ள கோணமாகும்.

OP, OQ என்பன முறையே α, β என்பனவற்றிற்குச் செவ்வன் களாகுக.

OA, OB, OP, OQ என்பன எல்லாம்



l இற்குச் செங்குத்துக்களாதலால், அவை ஒரே தளத்தில் இருக்கும்.

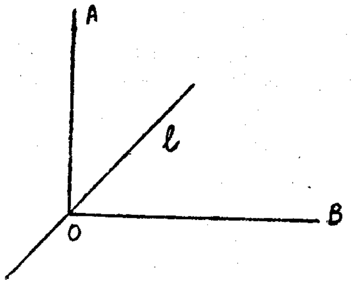
OP என்பது OA யிற்குச் செங்குத்து ; OQ என்பது OB யிற்குச் செங்குத்து.

ஆகவே, OA,OB என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆயின்,
OP, OQ என்பனவும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

$\therefore \ \angle AOB = \angle POQ$.

OA, OB என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தல்லவெனின், OA, OB என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணம் OP, OQ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கூர்ங்கோணத்திற்குச் சமனாகும்.

தேற்றம் 16. **ஒரு நேர்கோடு α என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வனாயின், அக் கோட்டிற்கூடாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு தளமும் α விற்குச் செங்குத்தாகும்.**



OA என்பது α என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வனாகுக ;

O என்பது அச்செவ்வன் அத்தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியாகுக.

β என்னும் யாதுமொரு தளத்தை OA யிற் கூடாக எடுக்க.

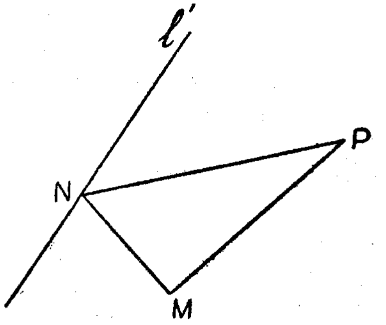
அது α என்பதை l என்னுங் கோட்டின் வழியே வெட்டுக.

O வினூடாக α என்னுந் தளத்தில் l இற்குச் செங்குத்தாக OB என்னுங் கோட்டை வரைக.

OA என்பது α விற்குச் செவ்வனாதலால், அது l இற்கும் OB யிற்குஞ் செங்குத்து.

ஆகவே, $\angle AOB$ என்பது α, β என்னுந் தளங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணமாகும் ; அது ஒரு செங்கோணத்திற்குச் சமனாகும்.

தேற்றம் 17. **α என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வனல்லாத l என்னும் யாதுமொரு கோட்டிற்கூடாக α விற்குச் செங்குத்தாய் ஒரு தளம் மாத்திரம் வரைதல் கூடும்.**



l என்பது α இலே முழுவதுங் கிடக்கவில்லை எனக் கொள்க. P என்பது l இன்மீது α விற்குப் பொதுவாயில்லாத ஒரு புள்ளியாகுக. PM என்பதை α விற்குச் செவ்வனாய் வரைக ; அது α என்பதை M இற் சந்திக்க. ஆயின் l, PM என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லுந் தளம் β என்பது α விற்குச் செங்குத்தாகும்.

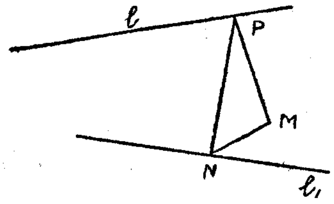
l இற்கூடாக α விற்குச் செங்குத்தாய் δ என்னும் வேறொரு தளம் இருக்கின்றதெனக் கொள்க. l' என்பது δ, α என்பனவற்றினுடைய வெட்டுக்கோடாகுக. δ என்பது β இலும் வேறானதெனின், l' என்பது M இற்கூடாகச் செல்லாது. MN என்பதை l' இற்குச் செங்குத்தாய் வரைக. அது l' என்பதை N இற் சந்திக்க ; PN என்பதைத் தொடுக்க. PM என்பது α விற்குச் செவ்வனாதலால், l' என்பது PM இற்குச் செங்குத்து. ஆகவே, l' என்பது PN இற்குச் செங்குத்து. ஆகவே, α, δ என்னுந் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் PNM ஆகும். ஆகவே, $\angle PNM$ = ஒரு செங்கோணம். $\angle PMN = 1$ செங்கோணமாதலால், இது ஓர் எதிர் மறுப்பைத் தரும். ஆகவே, l இற்கூடாக β தவிர்ந்த யாதொரு தளமும் α விற்குச் செங்குத்தாகாது.

ஆகவே, l என்பது முழுவதும் α விற் கிடவாதாயின், l இற்கூடாக α விற்குச் செங்குத்தாய் ஒரு தளம் மாத்திரம் இருக்கும்.

l என்பது முழுவதும் α விற் கிடக்கின்றதெனக் கொள்க.

l இன்மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுக்க ; α என்னும் தளத்திற்கு P யினூடாக PM என்னுஞ் செவ்வனை வரைக.

ஆயின், l, PM என்பனவற்றிற்கூடாக செல்லுந் தளம் β வானது α விற்குச் செங்குத்தாகும். l இற்கூடாக α விற்குச் செங்குத்தாய் வேறொரு தளம் δ என்பது இருக்கின்றதெனக் கொள்க. δ



$\therefore$ PM' என்பது PM இற்குச் செங்குத்து.

அதாவது, PM' என்பது P யிற்கூடாக α விற்குச் செவ்வன்.

$\therefore$ PM' என்பது PM ஒடு ஒன்றுரும்; δ என்னுந் தளமும் β என்னுந் தளத்தோடு ஒன்றுரும்.

பயிற்சி 38

1. α, β என்பன l என்னும் ஒரு கோட்டின்வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு தளங்கள்; P என்பது β இல் l இன்மீது கிடவாத ஒரு புள்ளி. M என்பது P யிலிருந்து α என்னுந் தளத்திற்கு வரைந்த செவ்வனின் அடியாக இருக்க, MN என்பது l என்பதை N இற் சந்திக்குமாறு l இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டதெனின், PN என்பது l இற்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

(மூன்று செங்குத்துகளின் தேற்றம்)

2. α என்னும் ஒரு தளத்திற்கு வெளியாலுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து PL என்பது l என்னும் ஒரு கோட்டை L இற் சந்திக்குமாறு α விலுள்ள l இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டுள்ளது; LM என்பது α வில் l இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டுள்ளது; PN என்பது LM இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டுள்ளது. PN என்பது α விற்குச் செவ்வனெனக் காட்டுக.

3. l, m என்பன α என்னும் ஒரு தளத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு கோடுகள். α விற்கு வெளியாலுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து PL, PM என்பன முறையே l, m என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டுள்ளன; அவை அவற்றை L, M என்பனவற்றில் முறையே சந்திக்கின்றன. L, M என்பனவற்றிற்கூடாக α என்னுந் தளத்தில் l, m என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்துக்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. இச் செங்குத்துக்கள் N இற் சந்தித்தால், PN என்பது α விற்குச் செவ்வனெனக் காட்டுக.

4. ஒன்றையொன்று வெட்டுந் தளங்கள் இரண்டனுள் ஒவ்வொன்றும் மூன்றுந்தளம் ஒன்றிற்குச் செங்குத்தாயின், அவ்விரு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு மூன்றுந் தளத்திற்குச் செவ்வனெனக் காட்டுக.

5. A, B, C, D என்பன எல்லாம் ஓரே தளத்தில் இல்லாத நான்கு புள்ளிகள்; BC என்பது AB, CD என்னும் இரண்டிற்குஞ் செங்குத்து. E, F என்பன முறையே AC, BD என்பனவற்றினுடைய மையங்களாயின், EF என்பது BC யிற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

6. $ABCD$, $PBQD$ என்பன BD என்பதைப் பொது மூலை விட்டமாகக்கொண்டு வேறு வேறு தளங்களிற் கிடக்கின்ற இரண்டு சமனில் சாய்சதுரங்கள். AP என்பது BD யிற்குச் செங்குத்தென்று நிறுவுக.

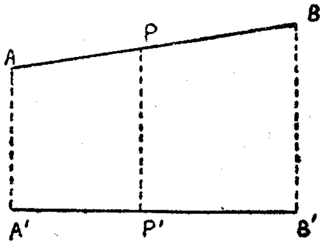
நிமிர்கோண எறியம்.

வரைவிலக்கணம். Q என்பது α என்னுந் தளத்திற்கு வெளியாலுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அத்தளத்திற்கு வரைந்த செவ்வனின் அடியாயின், Q என்பது α வின்மீது P யின் நிமிர்கோண எறியம் எனப்படும்,

தேற்றம் 18. **ஒரு தளத்தின் மீது ஒரு நேர்கோட்டின் நிமிர்கோண எறியம் ஒரு புள்ளியாயோ ஒரு நேர் கோடாயோ இருக்கும்.**

ஒரு தளத்தின் மீது ஒரு நேர்கோட்டுப் புள்ளிகள் எல்லாவற்றினுடைய நிமிர்கோண எறியங்களும் பொருந்துவனவாயோ ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ளனவாயோ இருக்குமென நிறுவல் வேண்டும்.

AB என்பது அக்கோடாயும் α என்பது அத்தளமாயும் இருக்க. AB என்பது α விற்குச் செவ்வனுயின், AB யின்மீது ஒவ்வொரு புள்ளியின் எறியமும் AB, α என்பனவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியாகும்.



AB என்பது α விற்குச் செவ்வனன்றெனின், A', B'என்பன α வின்மீது A, B என்பனவற்றினுடைய எறியங்களாருக. AA', BB' என்பன சமாந்தரமாதலால், அவை ஒரே தளத்தில் இருக்கும். AB யின்மீது யாதுமொரு புள்ளி P என்பதை எடுக்க; AA' இற்குச் சமாந்தரமாய் $A'B'$ என்பதை P' இற சந்திக்குமாறு PP' என்பதை வரைக. ஆயின், PP' என்பது α என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வன். ஆகவே, P' என்பது α வின்மீது P யின் எறியமாகும்.

ஆகவே, α என்னும் தளத்தின்மீது AB யின் யாதுமொரு புள்ளியின் எறியம் $A'B'$ இன்மீது கிடக்கும்.

அதாவது $A'B'$ என்பது α வின்மீது AB யின் எறியம்.

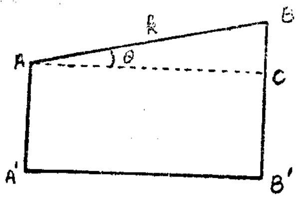
$A'B'$ என்பது α விற்குச் செங்குத்தாய் AB யிற்கூடாகச் செல்லுந்தளமும் α வும் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடாகும்.

வரைவிலக்கணம். l என்னும் ஒரு கோடு α என்னும் ஒரு தளத்திற்குச் செவ்வனன்றெனின், l, α என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் l இற்கும் α வின்மீது அதன் நிமிர்கோண எறியத்திற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் என வரையறுக்கப்படும்.

l என்பது α விற்குச் செவ்வனெனின், l, α என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் 90° என வரையறுக்கப்படும். l என்பது விற்குச் சமாந்தரமெனின், கோணம் பூச்சியமாகும். l என்பது செவ்வனுயோ சமாந்தரமாயோ இல்லையெனின், அக்கோணம் 0° இற்கும் 90° இற்கும் இடையிற் கிடக்கும்.

தேற்றம் 19. **நீளம் k ஆயுள்ள ஒரு கோடு ஒரு தளத்தோடு 90° இலுஞ் சிறிதாயோ சமனுயோ உள்ள θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்கினுல், அத்தளத்தின்மீது அக்கோட்டின் நிமிர்கோண எறியத்தினது நீளம் k கோசை θ.**

அக்கோடு அத்தளத்திற்குச் செவ்வனுயின், அத்தேற்றம் வெளிப்படை. அக்கோடு அத்தளத்திற்குச் செவ்வனன்று எனக் கொள்க.



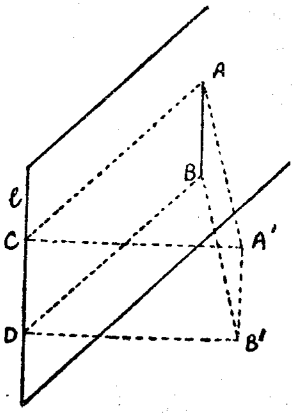
AB என்பது அக்கோடாகுக ; $A'B'$ என்பது அதன் எறியமாகுக. A யிற்கூடாக BB' என்பதை C யிற் சந்திக்கும்படி $A'B'$ என்பதற்குச் சமாந்தரமாய் AC என்பதை வரைக.

ஆயின், $ACB'A'$ என்பது ஒரு செவ்வகமாகும்.

$\therefore\ A'B' = AC = AB$ கோசை $\theta = k$ கோசை θ.

AB என்பது அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயின், B என்பது C யோடு பொருந்தும் ; $A'B' = AB$.

தேற்றம் 20. **α, β என்னும் இரு தளங்கள் l என்னும் ஒரு கோட்டினது நீளத்திற்கு வெட்ட, AB என்பது α வில் l இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடாயின், β என்னுந் தளத்தின்மீது AB யின் நிமிர்கோண எறியமாகிய $A'B'$ என்பது AB யிற்குச் சமன்.**



AB என்னுங் கோடு α வில் உண்டு ; $A'B$ என்பது β என்னுந் தளத்தின்மீது அதன் எறியம். AC, BD என்பனவற்றை l இற்குச், செங்குத்தாய் வரைக. அவை l என்பதை C, D என்பனவற்றிற் சந்திக்க. $ABCD$ என்பது ஒரு செவ்வகம்.

$\therefore\ AB = CD,\ AC = BD.$

$A'C$, $B'D$ என்பனவற்றைத் தொடுக்க.

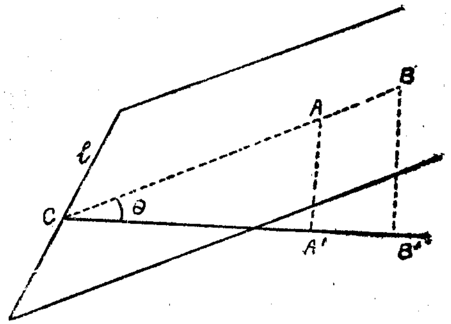
l என்பது AC, AA' என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாதலால், l என்பது $A'C$ என்பதற்கும் செங்குத்து. அதுபோல l என்பது $B'D$ இற்குச் செங்குத்து. θ என்பது α, β என்னுந் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணமாயின், $AA' = AC$ சைன் θ, $BB' = BD$ சைன் θ.

$\therefore\ AA' = BB'$, AA', BB' என்பன சமாந்தரம்.

ஆகவே $A'B'$, AB என்பன சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்.கும்.

$\theta = 90°$ ஆகுஞ் சிறப்புவகையில், A', B' என்பன முறையே C, D என்பனவற்றேடு பொருந்தும்.

தேற்றம் 21. **α, β என்னும் இருதளங்கள் l என்னும் ஒரு கோட்டினது நீளத்திற்கு θ என்னும் ஒரு கூர்ங்கோணத்தில் வெட்ட, AB என்பது l இற்குச் செங்குத்தாய் α விலுள்ள ஒரு கோடாயின், β வின்மீது AB யின் நிமிர்கோண எறியமாகிய $A'B'$ என்பது AB கோசை θ விற்குச் சமன்.**



நீட்டிய BA என்பது l என்பதை C யிற் சந்திக்க.

l ஆனது AA', AC என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாதலால், l என்பது $A'C$ இற்குஞ் செங்குத்து.

அதுபோல l என்பது $B'C$ யிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore\ C$, A', B' என்பன ஒரே நேர் கோட்டில் இருக்கும்.

$CA' = CA$ கோசை θ, $CB' = CB$ கோசை θ.

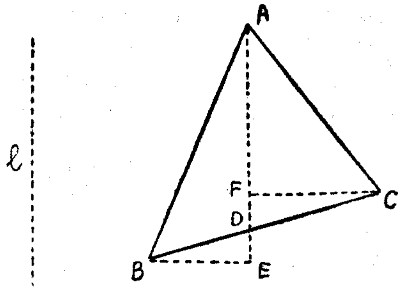
$\therefore\ A'B' = (CB - CA)$ கோசை $\theta = AB$ கோசை θ.

$A'B'$ என்பதும் l இற்குச் செங்குத்து.

தேற்றம் 22. **α, β என்பன θ என்னும் ஒரு கூர்ங்கோணத்தில் வெட்டும் இரு தளங்களாயிருக்க, β என்னுந் தளத்தின்மீது α என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும் ABC என்னும் முக்கோணியின் நிமிர்கோண எறியம் $A'B'C'$ ஆயின், $A'B'C'$ என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவிற்கு ABC என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவின் விகிதம் கோசை θ.**

l என்பது α, β என்பனவற்றின் வெட்டுக் கோடாகுக.

α விற் கிடக்கும் ABC என்னும் முக்கோணியில் ஒரு பக்கமும் l இற்குச் சமாந்தரமாய் இல்லையெனின், அம்முக்கோணியை இரு முக்கோணிகளாகப் பிரித்தற்கு l இற்குச் சமாந்தரமாய் அதனுடைய உச்சிகளுள் ஒன்றிற்கூடாக ஒரு கோடு வரைக.



AD என்பது A யிற்கூடாக l இற்குச் சமாந்தரமாய் BC என்பதை D யிற் சந்திக்கும்படி வரைக. BE, CF என்பன AD இற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படுக.

ABD என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ AD.BE$.

ACD என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ AD.CF$.

A', B', C', D', E', F' என்பன β என்னுந் தளத்தின்மீது

A, B, C, D, E, F என்பனவற்றினுடைய நிமிர்கோண எறியங்களாகுக.
$A'D'$ என்பது l இற்குச் சமாந்தரமாகும்.
$B'E'$ என்பது l இற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore \triangle A'B'D'$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} A'D' \times B'E'$
$= \frac{1}{2} AD \times BE$ கோசை θ.

அதுபோல, $\triangle A'C'D'$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} AD \times CE$ கோசை θ.

$\therefore A'B'C'$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} (AD.BE + AD.CF)$ கோசை θ
$= (\triangle ABC$ யின் பரப்பளவு$) \times$ கோசை θ.

முக்கோணி ABC யின் ஒரு பக்கம் l இற்குச் சமாந்தரமாயின், அமைப்பு வேண்டியதில்லை ; தேற்றம் உடனே பெறப்படும்.

யாதுமொரு மூடிய பல்கோணி ஒரு தொகை முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்படுதல் கூடுமாதலின், β என்னுந் தளத்தின்மீது α என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும் S என்னும் பரப்பையுடைய ஒரு மூடிய பல்கோணியின் நிமிர்கோண எறியத்தின் பரப்பளவு S' என்பது $S' = S$ கோசை θ என்னுந் தொடர்பாலே தரப்படும் என்பது பெறப்படும்.

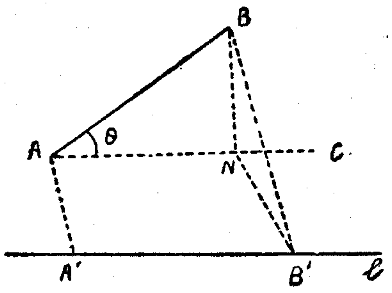
ஒரு கோட்டின்மீது ஒரு கோட்டின் எறியம்

வரைவிலக்கணம்.

A', B' என்பன A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து l என்னும் ஒரு கோட்டின்மீது வரையுஞ் செங்குத்துக்களினுடைய அடிகளாயின், $A'B'$ என்பது l என்னுங் கோட்டின்மீது அக்கோட்டின் நிமிர்கோண எறியமாகும்.

தேற்றம் 23. AB, l என்னுங் கோடுகளுக்கிடையில் 90° இற்கு மேற்படாதுள்ள கோணம் θ ஆயின், l இன்மீது AB யின் நிமிர்கோண எறியம் AB கோசை θ ஆகும்.

AB, l என்பன ஒரே தளத்தில் இருந்தால், ஒரு கோணத்தின் கோசைனின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து தேற்றம் பெறப்படும். AB, l என்பன ஒரு தளத்தனவல்ல எனக் கொள்க.



A யிற்கூடாக AC என்பதை l இற்குச் சமாந்தரமாய் வரைக.

ஆயின், AB, AC என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் θ ஆகும். BN என்பதை AC யிற்குச் செங்குத்தாய் வரைக. $B'N$ என்பதைத் தொடுக்க. BB' என்பது l இற்குச் செங்குத்தாகும் ; BN என்பதும் l இற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore B'N$ என்பது l இற்குச் செங்குத்து.

$\therefore B'N$ என்பது $A'A$ என்பதற்குச் சமாந்தரம் ; அவை ஒரே தளத்திலுள்ளனவாய் ஒரே கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் இருத்தலே அதற்குக் காரணம்.

$\therefore A'B' = AN = AB$ கோசை θ.

AB, l என்னுங் கோடுகள் செங்குத்தெனின், A', B' என்பன பொருந்தும் ; ஆயின், l இன்மீது AB யின் எறியம் பூச்சியமாகும்.

வரைவிலக்கணங்கள்.

நிலைக்குத்துக் கோடென்பது ஒரு முனையிற் சுயாதீனமாகத் தூங்கும் ஒரு நிறையையுடையதாய் மற்றைமுனையிற் பிடிக்கப்பட்டுள்ளதாய ஒரு குண்டு நூலுக்குச் சமாந்தரமான கோடாகும்.

ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டிற்கூடாகச் செல்லுந் தளம் **நிலைக்குத்துத் தளம்** எனப்படும்.

ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ள தளங் **கிடைத் தளம்** எனப்படும்.

ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு கோடு **கிடைக் கோடு** எனப்படும். யாதுமொரு கிடைக்கோடு ஒரு நிலைக்குத்துக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும் என்பது பெறப்படும்.

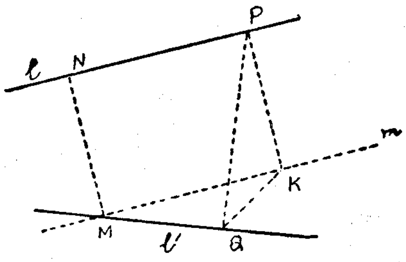
கிடையாயோ நிலையாயோ இல்லாத ஒரு தளம் **சாய்தளம்** எனப்படும். ஒரு சாய்தளத்திற் கிடக்குங் கிடைக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம்.

ஒரு சாய்தளத்திலுள்ள ஒரு கிடைக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் அத்தளத்திலுள்ள ஒரு கோடு அச்சாய்தளத்தின் மிகப்பெரிய **சாய்வுக் கோடு** எனப்படும்.

ஒரு கிடைத்தளத்தோடு ஒரு சாய்தளம் ஆக்குங்கோணம் அத்தளத்தின் **சாய்வுக் கோணம்** எனப்படும்.

தேற்றம் 24. ஓராயமானவை எனத் தந்த இரு கோடுகளுள் ஒவ்வொன்றையுஞ் செங்கோணங்களில் வெட்ட ஒரு நேர்கோடு மாத்திரம் வரைதல் கூடும்.

l, l' என்பன ஓராயமான இரு கோடுகளாகுக. l' இன்மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாக l இற்குச் சமாந்தரமாய் p என்னும் ஒரு கோட்டை வரைந்தால், p, l' என்பனவற்றைக்கொண்ட α என்னுந் தளமானது l' இற்கூடாக l இற்குச் சமாந்தரமான தனித் தளமாகும்.



l' என்பது l இற்குச் சமாந்தரமன்றாதலால், l' இற்கூடாக l இற்குச் சமாந்தரமாய் வேறு யாதொரு தளமும் இருத்தல் இயலாது.

α என்னுந் தளத்தின்மீது l இன் நிமிர்கோண எறியம் m என்னுங் கோடாகுக; அது l' என்பதை M இல் வெட்டுக. m என்பது l இற்குச் சமாந்தரம். M இற்கூடாக α என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வன் வரைக. இச்செவ்வன் l என்னுங் கோட்டை N என்னும் புள்ளியிற் சந்திக்கும்; இதற்கு M என்பது α வின்மீதுள்ள எறியமாகும். ஆகவே, MN என்னுங் கோடு l,l' என்னுங் கோடுகள் ஒவ்வொன்றையுஞ் செங்கோணங்களில் வெட்டும்.

l,l' என்னும் ஒவ்வொன்றையும் செங்கோணங்களில் வெட்டும் வேறொரு கோடு PQ உண்டு எனக் கொள்க. ஆயின், PQ வானது l',m என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாகும்; அதாவது அது α என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வனாகும். ஆகவே, PQ என்பது NM இற்குச் சமாந்தரமாகும். l,l' என்பன ஒரேதளத்தில் இல்லாமையால், இது முடியாது. ஆகவே, l,l' என்னும் ஒவ்வொன்றையுஞ் செங்கோணங்களில் வெட்டுதற்கு MN என்னும் ஒரு கோடு மாத்திரம் உண்டு. MN என்பது l,l' என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள மிகச்சிறிய தூரம் என்பதும் பெறப்படும். l,l' என்பனவற்றை முறையே P,Q என்பனவற்றில் வெட்டும் வேறு யாதுங் கோடு PQ என்பதை எடுக்க.

PK என்பதை m என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் வரைக.

ஆயின், PK என்பது α என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வன்.

ஆகவே, PK என்பது KQ விற்குச் செங்குத்து.

PKQ என்னுஞ் செங்கோண முக்கோணியில், $PQ>PK$.

$\therefore$ $MN=PK$ ஆதலால், $PQ>MN$.

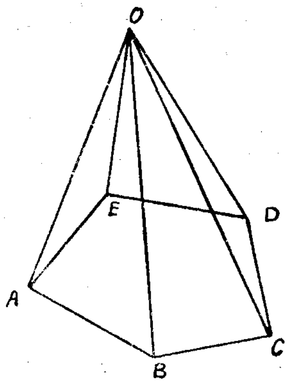
ஆகவே, l இன்மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் l' இன்மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் MN இலுஞ் சிறிதாதல் இயலாது.

திண்மவுருவங்கள்

பன்முகி என்பது நேர்கோட்டுத் தளவுருவங்களால் வரையறுக்கப்படும் ஒரு திண்மமாகும். இவற்றுட் சில சிறப்பு வகைகளை ஆராய்வோம்.

கூம்பகம்.

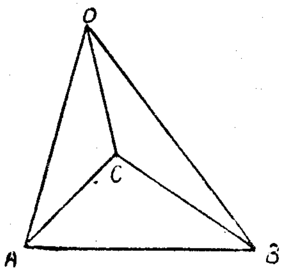
$ABCDE$ என்பது ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுருவமாகுக; O என்பது அத்தளத்திற் கிடவாத ஒரு புள்ளியாகுக. O என்பது அந்நேர்கோட்டுருவத்தினுடைய உச்சிகளுக்கு நேர்கோடுகளாலே தொடுக்கப்பட்டால் அந்நேர்கோட்டுருவத்தாலும் OAB, OBC, OCD, ODE, OEA என்னும் முக்கோணிகளாலும் வரையறுக்கப்படுந் திண்மங் **கூம்பகம்** எனப்படும்.



அந்நேர்கோட்டுருவத்திற்கு எத்தொகையான பக்கங்களும் இருக்கலாம். O என்பது அக்கூம்பகத்தின் உச்சி எனப்படும்; அந்நேர்கோட்டுருவம் அதன் அடி எனப்படும். உச்சியிலிருந்து அடிக்கு வரையுஞ் செங்குத்தினது நீளம் அக்கூம்பகத்தின் உயரம் எனப்படும்.

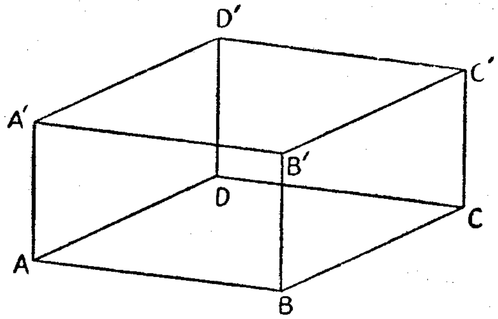
அதனடியும் ஒரு முக்கோணியாயின் அக்கூம்பகம் **நான்முகி** எனப்படும்.

O, A, B, C என்பன ஒரே தளத்திலில்லாத நான்கு புள்ளிகளாயின் $OABC$ என்னுந் திண்மவுருவம் நான்முகி எனப்படும். அந்நான்கு புள்ளிகளும் அந்நான்முகியினுடைய உச்சிகள் எனப்படும். அந்நான்முகிக்கு ABC, OAB, OAC, OBC என்னும் நான்கு முக்கோண முகங்களும் (OA, BC), (OB,CA), (OC,AB) என்னும் ஆறு விளிம்புகளும் உண்டு. ஒன்றையொன்று வெட்டாத இரு விளிம்புகள் எதிர் விளிம்புகள் எனப்படும். அந்நான்முகிக்கு மூன்று சோடி எதிர் விளிம்புகள் உண்டு.



இணைகரப்பரவை.

ஒவ்வொன்றும் ஓர் இணைகரமான மூன்று சோடிச் சமாந்தரமான முகங்களால் வரைப்புறுந் திண்மவுருவம் **இணைகரப்பரவை** எனப்படும். மேலுள்ள உருவத்திற் சமாந்தர முகச் சோடிகள் $(ABB'A', DCC'D')$, $(ADD'A', BCC'B')$, $(ABCD, A'B'C'D')$ என்பன.

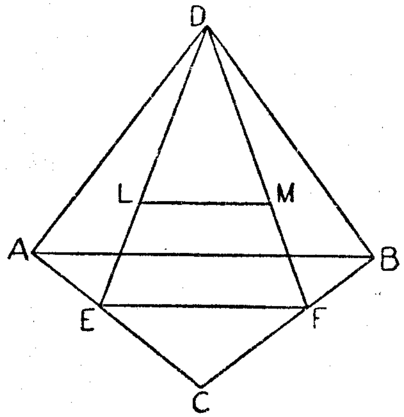


ஒவ்வோர் இணைகரமுஞ் செவ்வகமாயின், இணைகரப்பரவை செவ்வகமானதெனப்படும். ஒவ்வோர் இணைகரமுஞ் சதுரமாயின், இணைகரப்பரவை **சதுரமுகி** எனப்படும்.

ஒரு செவ்வக இணைகரப்பரவை **கனவுரு** எனப்படும்.

நான்முகியினுடைய இயல்புகள்.

I. ஒரு நான்முகியின் ஒவ்வோர் உச்சியையும் எதிர்முக மையப்போலிக்குத் தொடுப்பதால் ஆகும் நான்கு கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும்.



$ABCD$ என்பது ஒரு நான்முகியாகுக; E,F என்பன AC,BC என்பனவற்றினுடைய மையங்களாகுக. முக்கோணி ADC யின் மையப் போலியானது அதன் இடையம் DE யில் $DL = 2LE$ ஆகுமாறு உள்ள L என்னும் புள்ளி. $\triangle BDC$ யின் மையப்போலியானது DF இல் $DM = 2MF$ ஆகுமாறு உள்ள M என்னும் புள்ளி.

$\therefore$ LM என்பது EF இற்குச் சமாந்தரம்.

ஆனல், EF என்பது AB யிற்குச் சமாந்தரம்.

$\therefore$ LM என்பது AB யிற்குச் சமாந்தரம்.

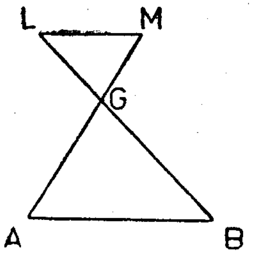
$\therefore$ AM, BL என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும். G என்பது அவ்வெட்டும் புள்ளியாகுக.

DLM, DEF என்னும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து,

$$LM = \tfrac{2}{3}EF.$$

இனி, $EF = \frac{1}{2}AB$.

$$\therefore \quad LM = \tfrac{1}{3}AB.$$



$\therefore$ LGM, BGA என்னும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து,

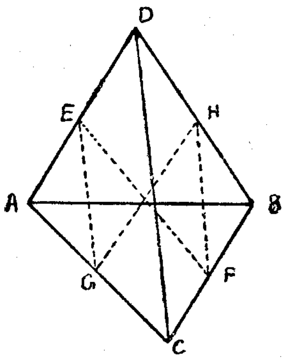
$$\frac{MG}{GA} = \frac{LG}{GB} = \frac{LM}{AB} = \tfrac{1}{3}.$$

$\therefore$ ஒரு நான்முகியின் V என்னும் ஓர் உச்சியானது எ**திர்முகத்தி**ன் மையப்போலி K யிற்குத் தொடுக்கப்பட, G என்பது VK இன் மீது $KG = \frac{1}{3}GV$ ஆகும்படியுள்ள புள்ளியாயின் அந்நான்முகியின் வேறுயாதும் உச்சியை எதிர்முகத்தின் மையப்போலிக்குத் தொடுக்குங் கோடும் G யினூடாகச் சென்று $3 : 1$ என்னும் அதே விகிதத்தில் G இற் பிரிக்கப்படும்.

ஓர் உச்சியை எதிர்முகத்தின் மையப்போலிக்குத் தொடுக்குங் கோடு அந்நான்முகியின் ஓர் **இடையம்** எனப்படும். அவ்விடையங்களின் சந்திப்புப் புள்ளி அந்நான்முகியின் **மையப்போலி** எனப்படும்.

II. **ஒரு நான்முகியினுடைய யாதுமோர் எதிர் விளிம்புச் சோடியின் மையங்களைத் தொடுக்கும் நேர்கோடு அந்நான்முகியின் மையப்போலிக்கூடாகச் சென்று இப்புள்ளியில் இருகூறிடப்படும்.**

அத்தகைக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடும் என்பது எளிதாக நிறுவப்படும். E,F என்பன AD, BC என்பனவற்றினுடைய மையங்களாகுக; G,H என்பன AC,BD என்பனவற்றினுடைய மையங்களாகுக.



$\triangle ADC$ யில், EG என்பது DC யிற்குச் சமாந்தரமாயும் $\frac{1}{2}DC$ யிற்குச் சமனாயும் இருக்கின்றது.

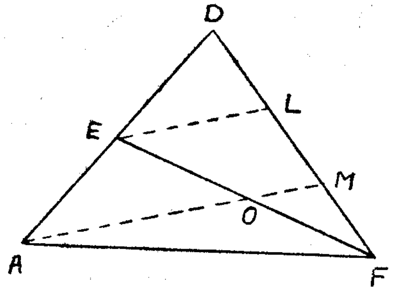
$\triangle BDC$ யில், HF என்பது DC யிற்குச் சமாந்தரமாயும் $\frac{1}{2}DC$ யிற்குச் சமனாயும் இருக்கிறது.

$\therefore$ EG, HF என்பன சமாந்தரசமமாம்.

$\therefore$ EF, GH என்பன ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

ஆகவே, மற்றைச் சோடி எதிர்விளிம்புகளின் மையங்களைத் தொடுக்குங் கோடும் அதே புள்ளியில் இருகூறிடப்படும். O என்பது அப்புள்ளியாகும்.

$\triangle DAF$ என்பதை ஆராய்க.



AO என்பது DF என்பதை M இற் சந்திக்க. E யினூடாக AM இற்குச் சமாந்தரமான கோடு DF என்பதை L இற் சந்திக்க.

$DE = EA$ ஆதலால் $DL = LM$

$EO = OF$ ஆதலால், $LM = MF$.

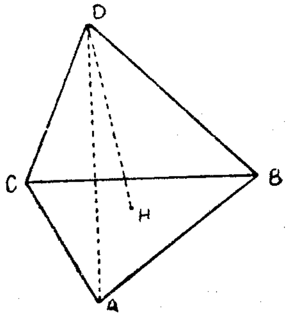
$\therefore\ MF = \frac{1}{3} FD$.

$\therefore\ M$ என்பது $\triangle DBC$ யின் நிமிர் மையம்.

இனி, $OM = \frac{1}{2} EL = \frac{1}{4} AM$.

$\therefore\ O$ என்பது அந்நான்முகியின் நிமிர் மையம்.

III. ஒரு நான்முகியின் இரண்டு எதிர் விளிம்புகள் செங்குத்தாயிருக்க வேறு இரண்டு எதிர்விளிம்புகளுஞ் செங்குத்தாயிருந்தால் மீதியிரண்டு எதிர் விளிம்புகளுஞ் செங்குத்தாகும்.



AB என்பது CD இற்குச் செங்குத்தாயிருக்க ; AC என்பது BD இற்குச் செங்குத்தாகுக. DH என்பது ABC என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகுக. ஆயின், AB என்பது CD, DH என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore\ AB$ என்பது CH இற்குச் செங்குத்தாகும்.

அதுபோல, AC என்பது BH இற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore\ H$ என்பது $\triangle ABC$ யின் நிமிர் மையம்.

$\therefore\ AH$ என்பது BC யிற்குச் செங்குத்து.

DH என்பதும் BC யிற்குச் செங்குத்து.

$\therefore\ BC$ என்பது AD இற்குச் செங்குத்து.

இந்த நான்முகியின் உச்சி ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து எதிர் முக்கோணி முகத்திற்கு வரையுஞ் செவ்வன் முக்கோணியின் நிமிர் மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் என்பதும் பெறப்படும்.

இந்நான்கு செவ்வன்களும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிறுவல் கூடும்.

AB என்னுங்கோடு DCH என்னுந் தளத்திற்குச் செவ்வன். K என்பது ABD என்னுந் தளத்தின்மீது C யிலிருந்து வரைந்த செவ்வனின் அடியாயின் AB என்னுங் கோடு DKC என்னுந் தளத்திற்குஞ் செவ்வனாகும்.

$\therefore\ CK$ என்பது DHC என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும்.

$\therefore\ CK$, DH என்பன சமாந்தரமல்ல என்பது தெளிவாதலின் அவை ஒன்றையொன்று வெட்டல் வேண்டும். அது போல, BL என்பது B யிலிருந்து ADC என்னுந் தளத்திற்கு வரையுஞ் செவ்வனெனின் BL என்பது CK, DH என்னும் ஒவ்வொன்றையும் வெட்டும். அம்மூன்று கோடுகள் CK, DH, BL என்பன எல்லாம் ஒரே தளத்தில் இல்லை.

அவை இவ்விரண்டாக ஒன்றையொன்று வெட்டுதலால், அவை எல்லாம் ஒரே புள்ளிக்கூடாகச் செல்லல் வேண்டும்.

அதுபோல, A யிலிருந்து BCD என்னுந் தளத்திற்கு வரையுஞ் செங்குத்தும் இப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லல் வேண்டும்.

இவ்வுடைமைகளையுடைய நான்முகி நிமிர்மையமானது எனப்படும். உச்சிகளிலிருந்து எதிர்முகங்களுக்கு வரையுஞ் செவ்வன்களின் பொது வெட்டுப் புள்ளி அந்நான்முகியின் நிமிர்மையம் எனப்படும்.

பயிற்சி 39

1. ஒரு நான்முகி நிமிர்மையமானதெனின், எதிர்விளிம்புகளினுடைய மையங்களைத் தொடுக்குங் கோடுகளினுடைய நீளங்கள் சமன்.

2. ஒரு நான்முகியினுடைய எதிர் விளிம்புகள் சமனாயின், இரண்டு எதிர்விளிம்புகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகச்சிறிய தூரம் அவற்றின் மையங்களைத் தொடுக்குங் கோட்டினது நீளமாகும்.

3. $ABCD$ என்பது AB, CD என்னும் இரண்டிற்கும் BC யானது செங்குத்தாயுள்ள ஒரு நான்முகி E, F என்பன முறையே AC, BD என்பனவற்றினுடைய மையங்களாயின், EF என்பது BC யிற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

4. OA, OB, OC என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள்; OA, OB என்பனவற்றினுடைய நீளங்கள் சமன். D என்பது AC யின் மையமாயின், OC, BD என்பனவற்றினுடைய பொதுச் செங்குத்து BD என்பதை $4:1$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.

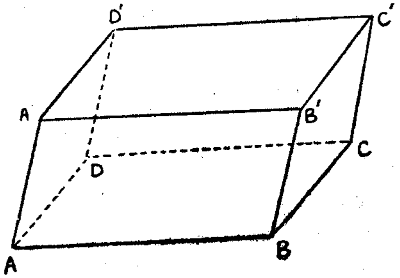
5. OA, OB என்பன இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகள் ; AOB என்னுந் தளத்திற் கிடவாத OC என்னும் ஒரு கோடு AOC, BOC என்னுங் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் α விற்குச் சமனாகும்படி உள்ளது. γ என்பது AOC, BOC என்னுந் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணமாயும், θ என்பது OA யிற்கும் BOC என்னுந் தளத்திற்கும் இடையிலுள்ள கோணமாயுமிருந்தால்,

$\sqrt{2}$ சைன் α சைன் $\gamma = 1$ என்றும்,

சைன் $\theta = \sqrt{2}$ கோசை γ என்றும் நிறுவுக.

இணைகரப்பரவை இயல்புகள்.

I. ஓர் இணைகரப்பரவையினுடைய நான்கு மூலை விட்டங்களும் ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.



அந்நான்கு மூலைவிட்டங்களும் AC', BD', CA', DB' என்பன.

AB, $D'C'$ என்பன சமனாயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கின்றமையால், $ABC'D'$ என்பது ஓர் இணைகரம். ஆகவே, அதன் மூலைவிட்டங்கள் AC', BD' என்பன ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

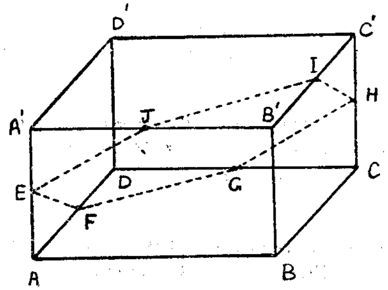
இனி, $AB'C'D$ என்பது ஓர் இணைகரம்.

$\therefore$ AC', $B'D$ என்பன ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

$AA'C'C$ என்பது ஓர் இணைகரமாதலால், AC', $A'C$ என்பன ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

$\therefore$ நான்கு மூலைவிட்டங்களும் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தின் மையமாகிய ஒரு பொதுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்.

II. தந்த ஒரு சோடி எதிருச்சிகளுள் யாதும் ஒன்றிற்கூடாகச் செல்லாத ஓர் இணைகரப்பரவையினுடைய விளிம்புகளின் மையங்கள் ஒரே தளத்திற் கிடக்கும்.



B, D' என்னும் எதிர் உச்சிகளை எடுக்க.

E, F, G, H, I, J என்பன B யூடோ D' ஊடோ செல்லாத விளிம்புகளினுடைய மையங்களாகுக.

EF என்பது $A'D$ இற்குச் சமாந்தரமாய் அதன் அரைப்பங்காகும்.

IH என்பது $B'C$ இற்குச் சமாந்தரமாய் அதன் அரைப்பங்காகும்.

$\therefore$ EF என்பது IH இற்குச் சமனாயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கும்.

அதுபோல, FG என்பது JI இற்குச் சமனாயும் சமாந்தரமாயும் இருக்கும்.

$\therefore$ EFG என்னுந் தளம் HIJ என்னுந் தளத்திற்குச் சமாந்தரம்.

$A'J$ என்பது DG யிற்குச் சமனாயுஞ் சமாந்தரமாயுமிருத்தலால், JG என்பது $A'D$ யிற்குச் சமாந்தரம்.

$\therefore$ JG என்பது EF இற்குச் சமாந்தரம்.

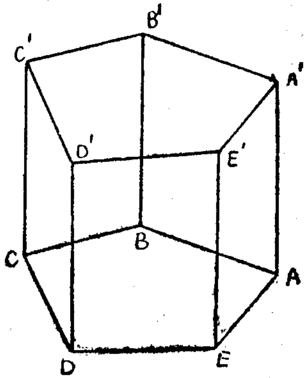
$\therefore$ J என்பது EFG என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும்.

$\therefore$ EFG, HIJ என்னுந் தளங்கள் ஒரே தளமாகும்.

அரியம்.

$ABCDE$ என்பது ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு மூடிய பல்கோணியாகுக.

$A'\ B'\ C'\ D'\ E'$ என்பது அவ்விரண்டு பல்கோணிகளினுடைய ஒத்த பக்கங்கள் சமாந்தரமாகுமாறு ஒரு சமாந்தரமான தளத்திலே திட்பமாய்ச் சமனாயுள்ள ஒரு பல்கோணியாகுக.

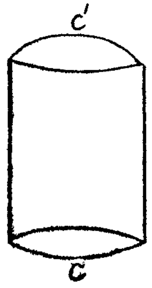


ஆயின், ஒத்த உச்சிகளைத் தொடுக்குங் கோடுகள் சமாந்தரம். $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ என்னுஞ் சமாந்தரமான தளங்களாலும் $ABB'A'$, $BCC'B'$ முதலாய இணைகரங்களாலும் வரையறுக்கப்படுந் திண்மவுருவம் **அரியம்** எனப்படும்.

AA', BB', ... என்னுஞ் சமாந்தரக் கோடுகள் ABC என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தெனின், அவ்வரியம் **நிமிர் அரியம்** எனப்படும். AA' என்பது ABC என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தன்றெனின், அவ்வரியம் சரிவானது எனப்படும்.

இணைகரப்பரவை அரியத்தின் சிறப்பு வகைகளுள் ஒன்றாகும்.

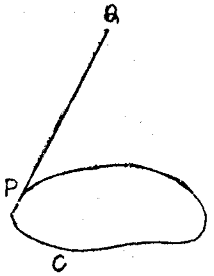
உருளை.



C என்பது ஒரு தளத்திற் கிடக்கும் ஒரு மூடிய வளையியாகுக. C' என்பது ஒரு சமாந்தரமான தளத்திலே அவ்வளையியிலுள்ள ஒத்த புள்ளிகளைத் தொடுக்குங் கோடுகள் சமாந்தரமாகுமாறு கிடக்குந் திருத்தமான சமவளையி ஒன்றாகுக. இச்சமாந்தரமான கோடுகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பினாலும் C, C' என்பனவற்றினுடைய தளங்களினாலும் வரையறுக்கப்படுந் திண்மம் **உருளை** எனப்படும்.

உருளையானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படலாம்.

C என்பது ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு மூடிய வளையியாகுக. அவ்வளையியின்மீதுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளிக்கூடாக C யினது தளத்திற்கிடவாத ஒரு தந்த நீளத்தையுடைய PQ என்னும் ஒரு கோடு வரைக. அக்கோடானது தனக்குச் சமாந்தரமாக P என்னும் அந்தம் அவ்வளையியை வரையுமாறு இயக்கப்பட்டால், அக்கோடு ஒரு பரப்பைப் பிறப்பிக்கும்; அப்பொழுது Q என்னும் முனை ஒரு சமாந்தரமான தளத்தில் C' என்னும் ஒரு வளையியை வரையும். அப்பரப்பாலும் C; C' என்பனவற்றினுடைய தளங்களாலும் வரையறுக்கப்படுந் திண்மம் ஓர் உருளையாகும். PQ என்னுங் கோடு யாதுமொரு நிலையில் அவ்வுருளையின் பரப்பின் **பிறப்பாக்கி** எனப்படும். PQ வினது திசை C யினது தளத்திற்குச் செங்குத்தாயின், அவ்வுருளை **நிமிருருளை** எனப்படும்.



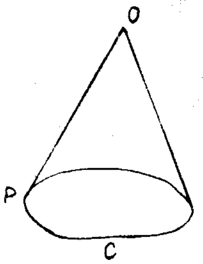
C என்னும் வளையி ஒரு வட்டமாயின், அவ்வுருளை **வட்டவுருளை** எனப்படும். C என்பது ஒரு வட்டமாயிருக்க, PQ வினது திசை C யினது தளத்திற்குச் செங்குத்தாயின், அவ்வுருளை **நிமிர்வட்டவுருளை** எனப்படும்.

கூம்பு.

C என்பது மூடிய ஒரு தள வளையியாகுக; O என்பது அதனுடைய தளத்திற்கு வெளியாலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக.

P என்னும் ஒரு புள்ளி C யின்மீது இயங்கினால், PO என்னுங் கோடு ஒரு பரப்பைப் பிறப்பிக்கும். இப்பரப்பாலும் C யினது தளத்தாலும் வரையறுக்கப்படுந் திண்மம் **கூம்பு** எனப்படும்.

C என்பது ஒரு வட்டமாயின், அக்கூம்பு **வட்டக் கூம்பு** எனப்படும். C என்பது ஒரு வட்டமாயிருக்க, O என்பதை C யின் மையத்திற்குத் தொடுக்குங்கோடு C யினது தளத்திற்குச் செங்குத்தெனின், அக்கூம்பு **நிமிர்வட்டக் கூம்பு** எனப்படும்.

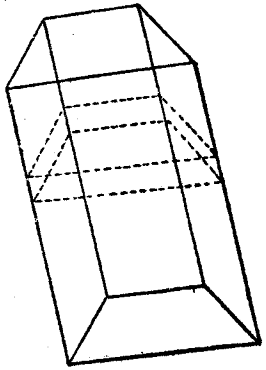


கனவளவு.

ஒரு திண்மவுருவால் அடக்கப்படும் இடம் அதன் **கனவளவு** எனப்படும்.

ஒரு பல்கோணி அடியின்மீது நிற்கும் ஒரு நிமிர் அரியத்திற்கோ, யாதும் ஓர் அடியின்மீது நிற்கும் ஒரு நிமிர் உருளைக்கோ, கனவளவானது அடியின் பரப்பை உயரத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கமாகும் என வரையறுக்கின்றோம். இவ்வரைவிலக்கணத்தால், அடி r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டமாயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நிமிர்வட்டவுருளையின் கனவளவு $\pi r^2 h$ ஆகும்.

இப்பொழுது A என்னும் பரப்பையுடைய ஒரு பல்கோணி அடியின்மீது நிற்கும் ஒரு சரிவரியத்தை ஆராய்க. சமாந்தரமான பல்கோணி முகங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் h ஆகுக. δx என்பது சிறிதாயின், அதனடியிலிருந்து x, $x + \delta x$ என்னுந் தூரங்களில் இரு சமாந்தரமான தளங்களுக்கு இடையில் அமைக்கப்படும் அவ்வரியப் பகுதியை ஆராய்க.



A என்னும் பரப்புடைய ஓர் அடியின்மீது நிற்கும் δx என்னும் உயரமான ஒரு நிமிரரியத்திற்கு இப்பகுதி மிக்க அண்ணளவாகச் சமனாகும். அம்முழு அரியமும் மிகப் பெரிய தொகையான சிற்றரியங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கற்பனை செய்தால், அம்முழு அரியத்தின் கனவளவானது, பிரிப்புகளினது தொகை வரையறையின்றிக் கூட்டப்பட, சிற்றரியம் ஒவ்வொன்றினது தடிப்பும் பூச்சியத்தை அணுக, அச்சிற்றரியங்களினுடைய கனவளவுகளின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும்.

∴ அம்முழுவரியத்தின் கனவளவு

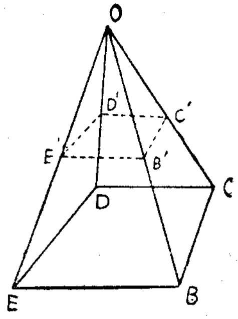
$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \sum_{x=0}^{x=h} A\, \delta x$$

$$= \int_0^h A\, dx = Ah.$$

அதாவது, அரியத்தின் கனவளவு=அடியின் பரப்பளவு×உயரம். இச்சூத்திரம் சரிவுருளைக்கும் பொருந்தும்.

இப்பொழுது, A என்னும் பரப்பையுடைய ஒரு பல்கோணி அடியின்மீது நிற்கும் ஒரு கூம்பகத்தை ஆராய்க.

O என்பது அக்கூம்பகத்தின் உச்சியாயும் $BCDE$ என்பது அதன் அடியாயும் இருக்க; h என்பது O விலிருந்து BCD என்னுந் தளத்திற்கு வரைந்த செங்குத்தினது நீளமாகுக. BCD யிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளம் அக்கூம்பகத்தினுடைய விளிம்புகளை B', C', D', E' என்பனவற்றில் வெட்டுக; இத்தளத்திலிருந்து O வின் செங்குத்துத் தூரம் x ஆகுக.



ஆயின், $B'C'D'E'$ என்னும் பல்கோணி $BCDE$ என்னும் பல்கோணிக்கு இயல்பொத்ததாகும்;

இரண்டு ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{x}{h}$ ஆகும்.

$$\frac{B'C'D'E' \text{ இன் பரப்பளவு}}{BCDE \text{ யின் பரப்பளவு}} = \frac{x^2}{h^2}.$$

அதாவது $\qquad$ பரப்பளவு $B'C'D'E' = \dfrac{Ax^2}{h^2}$.

இனி, O விலிருந்து $x+\delta x$ என்னுந் தூரத்திலுள்ள வேறொரு தளத்தை எடுக்க. இச் சமாந்தரமான தளங்களுக்கிடையில் அமையுங் கூம்பகப் பகுதி $\dfrac{Ax^2}{h^2}$ என்பதைத் தன்னடியாயும் δx என்பதைத் தன்னுயரமாயும் உள்ள ஒரு நிமிரரியமாகக் கொள்ளப்படலாம். அம்முழுக் கூம்பகத்தையும் மிகப் பெரிய தொகையான அத்தகைச் சிற்றரியங்களாகப் பிரித்து அவற்றினுடைய கனங்களின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையை எடுக்க,

$$\text{அக் கூம்பகத்தின் கனவளவு} = \int_0^h \frac{Ax^2}{h^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{A}{h^2}\,h^3 = \frac{1}{3}A.h.$$

$$\therefore \text{ கூம்பகத்தின் கனவளவு} = \frac{1}{3} \text{ அடிப் பரப்பளவு} \times \text{உயரம்}.$$

இச்சூத்திரம் ஒரு கூம்புக்கும் பொருந்தும்.

கோளம்.

r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டம் ஒரு விட்டம் பற்றி நான்கு செங்கோணங்களுக்கூடாகச் சுழற்றப்பட்டால், அவ்வட்டத்தின் பரிதி ஒரு கோளத்தின் பரப்பைப் பிறப்பிக்கும். இப்பரப்பின் மீதுள்ள எப்புள்ளியும் அவ்வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து r என்னுந் தூரத்தில் இருக்கும். அவ்வட்டத்தின் மையம் அக்கோளத்தின் மையமாகும்; அவ்வட்டத்தின் ஆரை அக்கோளத்தின் ஆரையாகும்.

ஒரு கோளமும் ஒரு தளமும் ஒன்றையொன்று வெட்டல்.

O விலே மையத்தையும் r இற்குச் சமனை ஆரையையும் உடைய ஒரு கோளத்தின் பரப்பை ஒரு தளம் வெட்டுக. P என்பது ஒரு வெட்டுப் புள்ளியாயும் N என்பது O விலிருந்து அத்தளத்திற்கு வரையுஞ் செங்குத்தின் அடியாயும் இருக்க; அத்தளத்திலிருந்து O வினது தூரம் p யாகுக. ON என்பது NP யிற்குச் செங்குத்தாதலால்,

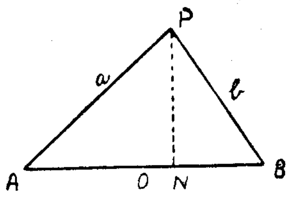
$$NP^2 = OP^2 - ON^2 = r^2 - p^2.$$

ஆகவே, அக்கோளமும் அத்தளமும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி ஒவ்வொன்றும் N இலே மையத்தையும் $\sqrt{(r^2-p^2)}$ இற்குச் சமனை ஆரையையுமுடைய அத்தளத்து வட்டத்தின்மீது கிடக்கும்.

அத்தளம் அக்கோளத்தின் மையத்தினூடாக சென்றால், $p = 0$; வெட்டும் வட்டத்தின் ஆரை அக்கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமன். அத்தகைய வட்டம் அக்கோளத்தின்மீதுள்ள ஒரு **பெரு வட்டம்** எனப்படும். அத்தளம் அக்கோளத்தின் மையத்திற்கூடாகச் செல்லாதாயின், வெட்டு வட்டம் கோளத்தின் மீதுள்ள ஒரு **சிறு வட்டம்** எனப்படும்.

இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டல்.

A, B என்பனவற்றை மையங்களாகவும் a, b என்பனவற்றை முறையே ஆரைகளாகவும் கொண்ட இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன எனக் கொள்க.



P என்பது ஒரு வெட்டுப் புள்ளியாகுக. PN என்பது AB என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படுக.

$$AP = a,\ BP = b.$$

$$AP^2 - BP^2 = AN^2 - BN^2$$
$$= (AN+BN)(AN-BN)$$
$$= AB\,(AN-BN).$$

$a = b$ எனின், N என்பது AB யின் மையம்.

a என்பது b யிற்குச் சமனில்லையெனின், $a > b$ ஆகுக.

ஆயின், $\quad AN > NB$.

O என்பது AB யின் மையமாயின்,

$$AN + NB = AO + ON - (OB - ON)$$
$$= 2ON,$$
$$\therefore ON = \frac{AP^2 - BP^2}{2AB} = \frac{a^2-b^2}{2AB}.$$

இது P யினது நிலையைச் சாராது.

ஆகவே, அவ்விரு கோளங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் எல்லாம் AB என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் N என்னும் நிலையான புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் தளத்தின்மீது கிடக்கும். ஆகவே, அவ்விரு கோளங் களுந் தம்முள் யாதுமொன்றை இத்தளம் வெட்டும் வட்டத்தின்வழியே ஒன்றையொன்று வெட்டும்.

தொடலித் தளம்.

P என்பது O விலே மையமுள்ள ஒரு கோளத்தின் பரப்பின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. O, P என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் யாதுமொரு தளம் p என்பது அக்கோளத்தை ஒரு பெரு வட்டத்தின்வழியே

வெட்டும். p என்னுந் தளத்தில் அவ்வட்டத்திற்கு P யிலுள்ள தொடலி அவ்வட்டத்தை வேறோரிடத்திலும் வெட்டாது.

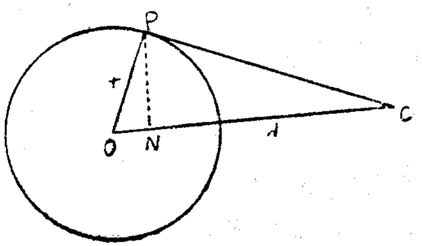
∴ இத்தொடலி அக்கோளத்தின் பரப்பை வேறோரிடத்திலும் வெட்டல் இயலாது.

அது அக்கோளத்திற்கு P யிலுள்ள ஒரு தொடலி எனப்படும். P யிலுள்ள ஒவ்வொரு தொடலியும் OP யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

∴ P யிலுள்ள தொடலிகள் எல்லாம் OP யிற்குச் செங்குத்தாய் P யிற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்திற் கிடக்கும். இத்தளம் P யிலுள்ள **தொடலித் தளம்** எனப்படும்.

ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடலிக் கூம்பு

C என்பது r என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்திற்குப் புறத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. C யிற்கும் அக்கோளத்தின் மையம் O விற்குமூடாகச் செல்லும் எத்தளமும் அக்கோளத்தை ஒரு பெரு வட்டத்தின் வழியே வெட்டும். CP என்பது C யிலிருந்து இவ் வட்டத்திற்கு வரையுந் தொடலியாகுக.



PN என்பது OC யிற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்டால்,

$$OC.ON = OP^2 = r^2.$$

$$\therefore\ ON = \frac{r^2}{OC},$$

இது P யினது நிலையைச் சாராது.

∴ P என்பது OC யிற்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலையான தளத்திற் கிடக்கும்.

∴ அத்தளத்திற்கு C யிலிருந்து வரையப்படுந் தொடலிகள் எல்லாவற்றினுடைய தொடுபுள்ளிகள் OC யிற்குச் செங்குத்தான தளத்தையுடைய ஒரு வட்டத்தின்மீது கிடக்கும்.

∴ அத்தொடலிகள் உச்சி C யிலும் அச்சு CO வின் வழியேயுமுள்ள ஒரு நிமிர் வட்டக்கூம்பின் பரப்பைப் பிறப்பிக்கும். இக்கூம்பு C என்னும் புள்ளியிலிருந்து வரைந்த **தொடலிக் கூம்பு** எனப்படும்.

ஒரு கோளத்தினுடைய கனவளவும் பரப்பின் பரப்பளவும் நுண் கணிதத்தின் ஈற்றதிகாரத்தில் ஆராயப்பட்டுள்ளன.

விடைகள்

திரிகோணகணிதம்

அத்தியாயம் 2. (பக்கம் **29**)

1. கோசை $\theta=\frac{4}{5}$, தான் $\theta=-\frac{3}{4}$, அல்லது கோசை $\theta=-\frac{4}{5}$, தான் $\theta=\frac{3}{4}$.
2. சைன் $\theta=\frac{1}{2}$, கோசை $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, அல்லது சைன் $\theta=-\frac{1}{2}$,

   கோசை $\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. கோசை $\theta=-\frac{1}{2}$, சைன் $\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, அல்லது $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. சைன் $\theta=+1$, அல்லது -1.
9. கோசை $\theta=\frac{4}{5}$, சைன் $\theta=\frac{3}{5}$.
10. கோசை $\theta=\frac{12}{13}$.
12. சைன் $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, அல்லது $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.
13. கோசை $\theta=0$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ அல்லது $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
14. $(3a-2b)^2+(3b-2a)^2=25$.
15. $(2b-a)^2-(2a-b)^2=9$.
16. $a^2=b$.
17. $(a-1)^2=5-2b$.
18. $a^2=2b-1$.
19. 1,0.
20. 1,0.

அத்தியாயம் 3. (பக்கம் 48)

1. n என்பது ஒரு முழுவெண், அல்லது பூச்சியமாயின்,

   $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, அல்லது $2n\pi$.
2. $x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$, அல்லது $n\pi$.
3. $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$.

4. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

5. $2x + \frac{\pi}{2} = 2n\pi \pm x$.

6. $5x + \pi = 2n\pi \pm 3x$.

7. $2x = n\pi - (-1)^n 3x$

8. $2x = n\pi - 3x$.

9. $x = n\pi - 2x$.

10. $2x = n\pi \pm x$.

11. $3x = n\pi + \frac{\pi}{2} + 2x$.

12. $\frac{\pi}{2} - x = 2n\pi \pm 5x$.

13. $x = n\pi - \frac{\pi}{3}$, அல்லது $n\pi - \frac{\pi}{4}$.

14. $x = n\pi$, அல்லது $n\pi - \frac{\pi}{4}$.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 51)

2. $x = (2n+1)\pi +$ சைன் $^{-1} \frac{3}{5}$.

9. $x = n\pi +$ தான் $^{-1}$ 3, அல்லது $n\pi +$ தான் $^{-1} \frac{1}{3}$.

12. உயர்வுப் பெறுமானம் $\sqrt{(1 +}$ சைன் 2α கோசை $2\beta)$,
இழிவுப் பெறுமானம் $-\sqrt{(1 +}$ சைன் 2α கோசை $2\beta)$.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 57)

8. உயர்வுப் பெறுமானம் 3, இழிவுப் பெறுமானம் -2.

12. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, அல்லது $4x + \frac{\pi}{2} = 2n\pi \pm 2x$.

13. $x = n\pi$, $n\pi +$ தான் $^{-1}2$, அல்லது $n\pi -$ தான் $^{-1}2$.

19. $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$.

20. $\theta = n\pi$ அல்லது $n\pi +$ தான் $^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, அல்லது $n\pi -$ தான் $^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

அத்தியாயம் 5. (பக்கம் 68)

3. $t =$ தான் θ வாயின், $(a + bt)^2 = c^2(1 + t^2)$.

4. $\alpha =$ தான் $^{-1}\frac{1}{2}$ ஆயின், $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\theta = 2n\pi \pm (\theta - \alpha)$.

6. $\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}), \frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$.

9. $x = n\pi + \frac{1}{2}$ தான் $^{-1}\frac{4}{3}$.

10. $x = \frac{2n\pi}{3}$, அல்லது $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.

ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

அத்தியாயம் 1. (பக்கம் 99)

5. $AB=5$, $AC=13$, $\left(\frac{-59}{18}, \frac{19}{6}\right)$, $\left(\frac{-19}{8}, \frac{-83}{8}\right)$

6 (1) இற்கு விடை $y+2x=4$.

அத்தியாயம் 2. (பக்கம் 110)

1. (i) $y+1=x-1$. (ii) $5x-3y-1=0$.

3. வெளியாக 1 : 5 என்னும் விகிதத்தில்.

4. $\frac{15}{2}$ சதுர அலகுகள்.

5. (a கோசை θ, a சைன் θ).

7. $3y+4x-21=0$, $3y+4x+19=0$,

10. (-2சைன் 2θ, $-1+2$ கோசை 2θ).

13. $y+3x-4=0$, $3y-x-2=0$; $\frac{16}{5}$ சதுர அலகுகள்.

அத்தியாயம் 3. (பக்கம் 122)

1. $y+2x-3=0$, $11y-2x-9=0$.

2. $(0,-3)$, $(5,-4)$, $(6, 1)$; $5x-y-3=0$, $x+5y-11=0$,
$5x-y-29=0$, $x+5y+15=0$.

4. $\frac{35}{4}$ சதுர அலகுகள்.

5. $\left(-\frac{9}{5}, \frac{32}{5}\right) \left(\frac{11}{5}, \frac{42}{5}\right)$.

6. $2(ax+by)+c+d=0$.

10. $(-3, -4), \left(-\frac{28}{31}, \frac{-33}{31}\right)$.

அத்தியாயம் 3. (பக்கம் 129

1. $5x+12y+27=0$.

2. $\left(-\frac{39}{140}, \frac{-27}{140}\right), \left(-\frac{19}{20}, \frac{23}{20}\right)$.

3. $(-1, 1), \left(\frac{9}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.

4. $(-3, 4)\ (-6, 0)$.

5. $\left(\frac{12}{7}, \frac{2}{7}\right), \left(-\frac{16}{7}, \frac{-3}{14}\right)$.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 139)

1. $x^2+y^2\pm 4x\pm 4y+4=0$.

2. $8(x^2+y^2)+6x+3y-25=0$.

3. $x^2+y^2+4x+6y-12=0$. (அத்தகை வட்டம் ஒன்றே உண்டு.)

4. $3x+3y+1=0$.

5. $A\equiv(h, k)$ ஆயின், $\left(\frac{k^2+1}{h}, -k\right)$.

6. $3x+4y-20=0$, $3x+4y+10=0$, $\left(\frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right), \left(-\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

7. $x^2+y^2-y=0$.

8. கோசை $\theta=1$, சைன் $\theta=0$, அல்லது கோசை $\theta=\frac{3}{5}$, சைன் $\theta=\frac{4}{5}$;
$x=3$, $3x+4y=15$.

10. $\left(-\frac{a^2l}{n}, -\frac{a^2m}{n}\right)$.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 153)

1. $3x-y-5=0$.

2. $8(x^2+y^2)-15x+5y-7=0$.

3. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

6. $(1, 1), (2, 2)$.

8. $x^2+y^2+4x+6y+1=0$.

10. $g=\frac{1}{2}$, அல்லது -2 ஆயின், $x^2+y^2+2gx+2gy+g^2=0$.
$4f=5+\sqrt{41}$, அல்லது $5-\sqrt{41}$ ஆயின், $x^2+y^2+2fx-2fy+f^2=0$.

அத்தியாயம் 5. (பக்கம் 161)

7. $k+th=2a+at^3$.

8. OP, OQ என்பன அச்சுக்களாக எடுக்கப்பட்டால், அப்பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2+4x=0$.

நுண்கணிதம்

அத்தியாயம் 1. (பக்கம் 196)

1. $\frac{9}{8}, \frac{3}{5}$.

2. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) 0, (iii) 0, (iv) $\frac{1}{2}$, (v) $\frac{5}{8}\sqrt{2}$, (vi) 0, (vii) -2.

அத்தியாயம் 2. (பக்கம் 213)

1. (i) $\frac{2x-6}{(3x+1)^3}$, (ii) $\frac{-(3x+5)}{2(x-1)^3\sqrt{(x+1)}}$, (iii) $\frac{1-x}{(2x+1)^4}$.

2. (i) $\frac{2}{\sqrt{t}}$ சைன்$^3 \sqrt{t}$ கோசை $\sqrt{t}$, (ii) $\frac{-2}{(\text{சைன் } t - \text{கோசை } t)^2}$.

(iii) $\frac{4 \text{ கோசை } t + \text{கோசை}^2 t + 1}{2(2+\text{கோசை } t)^{\frac{3}{2}}}$,

(iv) $\frac{3}{2}$ கோசை^{2} $2t$ (3 கோசை $5t$ − கோசை t),

(v) $\frac{\text{சைன் } 2t \text{ கோசை } 5t + 15 \text{ சைன் } 5t \text{ சைன்}^2 t}{\text{கோசை}^4 5t}$.

3. (i) தான் y சீக y (2 சீக^2 y + தான்^{2} y),

(ii) $\frac{2 \text{ தான் } y \text{ சீக}^2 y}{\sqrt{(\text{தான்}^2 y + \text{சீக}^2 y)}}$, (iii) $\frac{\text{சீக}^3 y + \text{சீக}^2 y + \text{சீக } y}{(1+2 \text{ சீக } y)^{\frac{3}{2}}}$.

4. (i) $\frac{2 \text{ சைன்}^{-1} x}{1-x^2}\left[\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2x \text{ சைன்}^{-1} x}{(1-x^2)^2}\right]$,

(ii) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \text{ தான்}^{-1} \sqrt{x}$ (iii) $\frac{1}{2}$.

அத்தியாயம் 2. (பக்கம் 222)

5. $(-1)^n n!\left\{\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n+1}\right\}$.

அத்தியாயம் 3. (பக்கம் 238)

1. $x=-\frac{2}{5}$ இல் உயர்வு, $x=0$ இல் இழிவு ; 8.
2. $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ இல் உயர்வு, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ இல் இழிவு.
4. $x=-1$ இல் இழிவு, $x=1$ இல் உயர்வு.
5. $x=-\sqrt{3}$ இல் உயர்வு, $x=\sqrt{3}$ இல் இழிவு.
6. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$.
7. $x=\frac{\pi}{6}$ இல் உயர்வு ; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, 0.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 249)

1. (i) $\frac{1}{12}$ கோசை $3x-\frac{3}{4}$ கோசை x, (ii) $x-\frac{1}{2}$ கோசை $2x$,

(iii) $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$, (iv) $\sqrt{(2x+3)}$,

(v) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{(x+1)}$.

2. (i) $\frac{4}{3}t^3+4t-\frac{1}{t}$,

(ii) $\frac{3}{28}(2t+1)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{16}(2t+1)^{\frac{4}{3}}$.

(iii) $-\text{கோதா}\,\frac{t}{2}$, (iv) $\text{தான்}\,\frac{t}{2}$, (v) $\frac{1}{6}\text{தான்}^{-1}\frac{3t}{2}$,

(vi) $\frac{1}{3}\text{சைன்}^{-1}\frac{3t}{2}$, (vii) $\text{தான்}^{-1}(t-1)$, (viii) $\text{சைன்}^{-1}\frac{t-1}{2}$.

3. $4\frac{1}{2}$ சதுர அலகுகள். 4. $\frac{2}{3}$ சதுர அலகுகள். 5. $\frac{16}{3}a^2$.

அத்தியாயம் 5. (பக்கம் 270)

3. உயர்வு $x=-1$ இல், இழிவு $x=1$ இல்.
5. $x>x_0$ ஆயிருக்கும்போது குறைகின்றது.

இங்கே மட $x_0=\frac{1}{p}$.

6. மட$|2x+1|-$மட$|x+1|$.
7. (a) x மட $x-x$ (b) $x\,\text{தான்}^{-1}x-\frac{1}{2}\text{மட}\,(1+x^2)$.

(c) $x^2e^x-2xe^x+2e^x$.

8. (a) $-\frac{1}{2+\text{சைன்}\,x}$; (b) $e^{\text{தான்}\,x}$; (c) $\frac{1}{2}(\text{மட}\,x)^2$.
9. மட தான் $\frac{x}{2}$; மட$\left|1+\text{தான்}\,\frac{x}{2}\right|-$மட$\left|1-\text{தான்}\,\frac{x}{2}\right|$.
10. $\frac{2}{3}\text{தான்}^{-1}\left(\frac{1}{3}\text{தான்}\,\frac{x}{2}\right)$; $\frac{1}{3}\left\{\text{மட}\left|3+\text{தான்}\frac{x}{2}\right|-\text{மட}\left|3-\text{தான்}\frac{x}{2}\right|\right\}$.
11. சைன் $x-\frac{4}{3}$ சைன்$^3 x+\frac{6}{5}$ சைன்$^5 x-\frac{4}{7}$ சைன்$^7 x+\frac{1}{9}$ சைன்$^9 x$;

தான் $x+$ தான்$^3 x+\frac{3}{5}$ தான்$^5 x+\frac{1}{7}$ தான்$^7 x$.

அட்சரகணிதம்

அத்தியாயம் 1. (பக்கம் 287)

1. (i) $(x+1)(x+2)^2$, (ii) $3(x+y)(y+x)(z+x)$,

(iii) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$,

(iv) $3(x-y)(y-z)(z-x)$, (v) $3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$,

(vi) $-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.

அத்தியாயம் 1. (பக்கம் 295)

3. $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$.
5. $\frac{q-b}{2(a-p)}$.
6. (i) a, c என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறியும் b யிற்கு முரண் குறியும் உண்டு,

(ii) a, b, c என்பனவற்றிற்கு ஒரே குறி உண்டு,

(iii) a, c என்பனவற்றிற்கு முரண் குறிகள் உண்டு,

(vi) $c=0$, a, b என்பன பூச்சியமல்ல,

(v) b, c என்னும் இரண்டும் பூச்சியம், a பூச்சியமன்று.

8. $x=1,\ 1,\ -2+\sqrt{3}$, அல்லது $-2-\sqrt{3}$.

10. $a^2x^2-a(b+c)x+bc=0$.

11. $\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{2c^2}{a^2}$.

அத்தியாயம் 1. (பக்கம் 298)

1. $x=1,\ y=0$; $x=-1,\ y=0$; $x=1,\ y=-1$; $x=-1,\ y=1$.
2. $x=y=0$; $x=y=-5$; $x=-2,\ y=1$; $x=1,\ y=-2$.
3. $x=5,\ y=-3$; $x=-7,\ y=5$; $x=\frac{1}{2},\ y=0$; $x=-2\frac{1}{2},\ y=2$.
4. $x=y=-\frac{3}{2}$; $x=y=1$.
5. $x=y=1$; $x=y=-\frac{1}{2}$;

$$x=\frac{-1+\sqrt{65}}{32},\ y=\frac{3(1-\sqrt{65})}{32};\ x=\frac{-1-\sqrt{65}}{32},$$

$$y=\frac{3(1+\sqrt{65})}{32}.$$

அத்தியாயம் 3. (பக்கம் 321)

7. $-n(8n^3+8n^2-1)$.
8. $\frac{1}{12}(n+2)(n+3)(n+4)(3n-1)+2$.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 326)

4. 4536. 9. 5040. 10. 1320.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 330)

1. 29937600. 2. (a) 658627200, (b) 11×11 !
3. 277200, 24. 4. 150. 5. 120960.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 334)

3. 757. 4. 330, 150. 9. 4050.
10. 26580

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 337)

1. 7332. 2. 6.

அத்தியாயம் 4. (பக்கம் 346)

1. ஏழாம் உறுப்பு ($^9C_3\times2^6$). 2. 32.
3. (a) $10^{12}-4.10^9+6.10^6-4.10^3+1$, (b) 1153.
4. ஆறும் உறுப்பு. 5. ஐந்தாம் ஆறும் உறுப்புக்கள்.
11. 1500. 12. 195.
13. n என்பது இரட்டையெண்ணுயின், $r=\frac{n}{2}$ ஆகும்பொழுது P_r என்பது மிகப் பெரிது ; n ஒற்றையெண்ணுயின், $r=\frac{n+1}{2}$, அல்லது $\frac{n-1}{2}$ ஆகும்பொழுது P_r என்பது மிகப் பெரிது.